Kalkulus II. tételek és definíciók

1. Impropius integrál:

   $\int_a^b f$ határozott integrál értelmezését kiterjesztjük nem korlátos intervallumra, és nem korlátos függvényekre.

   (a) *nem korlátos intervallumra:* Legyen f:[a;$+\infty$) $\to$ R olyan, hogy $\forall$ b>a-ra Riemann-integrálható az [a;b]-n. Az f függvénynek az [a;$+\infty$)-n van impropius integrálja, ha $\exists$ $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f$.
   Ezt az integrált konvergensnek nevezem, ha tart egy A $\in$ R számhoz. Divergens pedig akkor, ha nem konvergens.

   (b) *nem korlátos függvényre (korlátos intervallumon):* Legyen f:(a;b] $\to$ R Riemann-integrálható $\forall$ [c;b] $\subset$ (a;b]-re. Az f függvénynek az (a;b]-n van impropius integrálja, ha $\exists$ $\lim_{c\to a+} \int_c^b f$.
   Konvergens ha a limes véges, és divergens ha nem.

2. Végtelen sorok:

   Legyen $(a_n)_{n\in N^+} \subset$ R sorozat. Legyen $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ $\forall$n-re. Az s_n sorozatot az (a_n) sorozatból képzett, végtelen sornak nevezzük, jele: $\sum a_n$. Ha ennek létezik határértéke, akkor ezt a végtelen sor összegének nevezzük. Jelölésben a következőt alkalmazzuk: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = lims_n = lim_{n\to+\infty}(\sum_{k=1}^{n} a_k)$.
   A végtelen sor konvergens, ha a limesz létezik és véges. Divergens, ha nem konvergens.

   (a) *Sor összeg és műveletek kapcsolata:* Legyen $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens és c $\in$ R. Ekkor $\sum(a_k + b_k)$ és $\sum(ca_k)$ is konvergens. Tehát: $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ és ugyanez áll a c-vel vett szorzatra is.

   (b) *Konvergencia kritériumok:* Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor ebből következik, hogy $\lim a_n = 0$. Ez szükséges feltétele a konvergenciának és a megfordítása a tételnek nem igaz.
   Biz.: $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ legyen S=$\lim_{n\to+\infty} s_n$, ekkor $a_n = s_n - s_{n-1}$, ami tart S-S=0-hoz, ha n tart $+\infty$-be.

   (c) *Elégséges feltételek:*

      i. *Összehasonlító kritérium:* Legyen $0 \le a_n \le b_n \forall$n>N. Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens. Ha pedig $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is az. (Elég ha ezek a feltételek, valamilyen véges indextől teljesülnek!)

      ii. *Gyökkritérium:* Legyen $a_n \ge 0$. Ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens. Valamint, ha $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.

      iii. *Hányados kritérium:* Legyen $a_n > 0$ $\forall$n. Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens. Ha pedig $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.

      Ezek a kritériumok visszavezethetőek a mértani sorozat konvergenciájára. Ha a határérték =1-el, akkor partizánkodni kell.

   (d) *Emelt gyakorlati „kiegészítések”:*

      i. Egy $\sum_{n\in N} a_n$ sorozat abszolút konvergens, ha $\sum_{n\in R} |a_n|$ konvergens. Ha egy sorozat abszolút konvergens, akkor ebből következik, hogy konvergens. Az állítás megfordítása nem igaz.

      ii. $\sum_{n\in N} a_n$ feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.
      (pl: $\sum_{n\in N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$)

iii. Cauchy-kritérium: A $\sum_{n\in N} a_n$ sor konvergens, akkor és csak akkor, ha $(\forall\epsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n, m \geq n_0 : n, m \in N : m > n)$, hogy $\sum_{k=n+1}^{m} a_k \leq \epsilon$.

iv. *Leibniz-kritérium:* Legyen $\sum_{n\in N} a_n$ olyan sor, hogy $\forall n \in N\ a_n a_{n+1} < 0$ továbbá $|a_n| \to 0$ FOGYÓLAG, akkor $\sum_{n\in N} a_n$ konvergens.

v. *Gauss-kritérium (kondenzációs kritérium):* Legyen $(a_n)_{n\in N}$ monoton fogyó nullsorozat. $\sum_{n\in N} a_n$ sor konvergens, akkor és csak akkor, ha $\sum_{n\in N} 2^n a_{2^n}$ is konvergens. (a_n sorozat pozitív tagú)

vi. *Integrál-kritérium:* Legyen f:[0;+∞) $\to R$ monoton fogyó függvény és Riemann-integrálható impropius értelemben, $0 \leq$ f. Ekkor $\int_0^{+\infty} f$ konvergens, akkor és csak akkor, ha $\sum_{n\in N} f(n)$ is az.

3. Függvénysorozatok és függvény sorok:

Legyen $f_n : R \to R$ függvények és n $\in$ N. Ezek függvénysorozatot alkotnak. Legyen (f_n) egy függvény sorozat, ennek konvergencia halmaza KH(f_n) := { $x \in R : (f_n(x))$ számsorozat konvergens}. Ennek határfüggvénye f: KH(f_n) $\to$ R, f(x)=$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(a) *Egyenletes konvergencia:* Legyen (f_n) egy függvény sorozat, E $\subset$ R halmaz. Az (f_n) függvény sorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez az E halmazon, ha $\forall\epsilon > 0 : \exists N$, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon : \forall n > N : \forall x \in E$.

(b) *Öröklődési tételek:*

i. Legyenek $f_n : R \to R$ függvények folytonosak. Ha f_n egyenletesen tart f-hez az I intervallumon, akkor f függvény is folytonos.

ii. Legyenek $f_n : R \to R$ függvények differenciállhatóak. Ha f_n pontonként (nem egyenletesen) tart f-hez az I intervallumon, f_n' viszont egyenletesen tart g függvényhez I-n, akkor ebből következik, hogy f is differenciálható és f'=g, azaz: $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.

iii. Legyenek $f_n : [a;b] \to R$ függvények, Riemann-integrálhatóak. Ha f_n egyenletesen tart f-hez [a;b] intervallumon, akkor f is Riemann-integrálható és: $\int_a^b \lim(f_n) = \lim \int_a^b f_n$.

(c) Legyen $c_n \subset$ R egy sorozat és a$\in$ R. A $\sum c_n(x-a)^n$ függvénysort a közepű hatványsornak nevezzük. Ez akkor konvergens, ha $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n(x-a)^n|} < 1$. A hatványsor konvergencia sugarának nevezzük: R = $\frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ -t ha a benne szereplő határérték létezik, véges és nem nulla értékű. Ha 0, akkor a konvergencia sugár $+\infty$, ha végtelen akkor a konvergencia sugár 0.

(d) *Cauchy-Hadamard tétel:*
Legyen $\sum c_n(x-a)^n$ egy hatványsor és legyen R ennek konvergencia sugara. Ha $|x-a| < R \to \sum c_n(x-a)^n$ konvergens. Ha $|x-a| > R \to \sum c_n(x-a)^n$ divergens. A konvergencia sugár végpontjaiban külön vizsgálni kell, hogy van-e véges határéték. A konvergencia halmaz 4 féle lehet: [;], [;), (;], (;).

(e) *Abel-tétel:*
Egy hatványsor a konvergencia halmazának $\forall$ korlátos és zárt részintervallumán egyenletesen konvergens. Ennek következménye, hogy:

i. Egy hatványsor összegfüggvénye a konvergencia intervallum belsejében akárhányszor differenciálható és f'(x) = $\sum c_n n(x-a)^{n-1}$.

(f) *Taylor-sorok:*
Az f függvényt Taylor-sorba fejthetőnek nevezzük, ha f(x) =$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ alakban írható. Vannak ismert Taylor-sorok, a többi ezekből deriválással és integrálással származtatható.

pl.: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^n\ x \in (-1;1)$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\ x \in R$, $sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\ x \in R$

(g) *Trigonometrikus sorok:* Állítás: f függvény felírható szinuszok és koszinuszok lineárkombinációjaként; f(x) = $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k cos(kx) + b_k sin(kx))$. Ahol az együtthatók: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$ és $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx$, ahol a_n együtthatókra 0≤n, b_n-ekre pedig 1≤n. Ahhoz, hogy ez megtehető legyen a függvénynek legfeljebb megszámlálhatóan végtelen szakadási pontja lehet, és azokban definiálhatjuk a függvény értékét a két függvényérték számtani közepébe.

4. *Többváltozós függvények:*

Rövid bevezetés: R^n tér a szám n-esek halmaza. Egy ilyen halmazt ellátunk algebrai és topológia struktúrával is. x , y $\in R^n$ ezek összege: x + y = $(x_1 + y_1; ...; x_n + y_n)$, számmal való szorzata: c * x = $(cx_1; ...; cx_n)$ értelmezett. x hossza: |x| = $\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, x és y távolsága ebből pedig |x - y|. Értelmezünk még függvényeket is, amelyek f: $R^n \to R^k$ rendelnek.

(a) *Határérték:*
Legyen f : $R^n \to R^k$ rendelő függvény és $a \in R^n$. Az f függvénynek a-ban a határértéke A $\in R^k$, ha $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$,hogy |x-a| $< \delta$ és $x \neq a \to |f(x) - A| < \epsilon$. Jelölése: $\lim_{x \to a} f(x) = A$

(b) *Folytonosság:*
Legyen f : $R^n \to R^k$ rendelő függvény és a $\in D(f)$. Az f függvény folytonos a-ban , ha $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$,hogy |x-a| $< \delta \to |f(x) - f(a)| < \epsilon$. (Jelölése: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$)

(c) *Parciális derivált:*
Legyen f : $R^n \to$R és a $\in R^n$. Az f függvénynek az i. változó szerint $\exists$ parciális deriváltja a-ban, ha $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1,...,a_i+h,...,a_n) - f(a_1,...,a_i,...,a_n)}{h}$ határérték és véges. Jele: $\partial_i f(a)$

(d) *Derivált mátrix:*
Legyen f : $R^n \to R^k$ rendelő függvény, x $\in R^n$ és D(f) tartalmazzon egy x körüli kis gömböt. Az f függvény differenciálható x-ben, ha $\exists$ A $\in R^{k \times n}$ mátrix, hogy $\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0$, és ekkor f deriváltja x-ben A.

(e) *Szélsőérték:*
Legyen f : $R^n \to R$ rendelő függvény kétszer differenciálható a-ban, és f'(a)=0. Ekkor ha f''(a) pozitív definit, akkor f-nek lokális minimuma van, ha negatív definit, akkor lokális maximuma van, ha indefinit, akkor nincs a-ban szélsőértéke.

(f) *Mátrix definitsége:*
Egy mátrixot pozitív definitnek nevezünk, ha minden sajátértéke pozitív. Negatív definit, ha minden sajátértéke negatív, és indenfinit, ha változó előjelű sajátértékei vannak.

(g) *Primitív függvény:*
Legyen f : $R^n \to R^n$. Ennek primitív függvénye (/potenciálja) F : $R^n \to R$, ha F' = f.

(h) *Young-tétel:*
Ha F : $R^n \to R$ rendelő függvény kétszer differenciálható és F'' folytonos függvény, akkor $\partial_j \partial_k F = \partial_k \partial_j F$ $\forall k, j = 1, 2, ..., n$. $\to$ Ha f: $R^n \to R^n$ függvény differenciálható és parciális deriváltjai folytonosak, akkor ha f-nek $\exists$ primitív függvénye, $\to$ f' mátrix szimmetrikus.

(i) *Görbe:*
Egy r : [a;b] $\to R^k$ folytonos függvényt görbének nevezzük.

(j) *Görbe ívhossza:*
Legyen $t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$ osztópontok. A görbe hosszának közelítő összege $\sigma(t_1, t_2, ..., t_n) = \sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})|$. Az r görbe hossza l(r) = sup$\{\sigma(t_1, ..., t_n) : \forall$ felosztásra $\}$. Ebből következik, hogy l(r) = $\int_a^b |r'(t)| dt$.

(k) *Vonalintegrál:*
Legyen egy r : [a,b] $\to R^k$ görbe és f : $R^k \to R^k$ függvény. Legyenek $t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$ osztópontok és $\tau_i \in [t_{i-1}; t_i] \forall i$. Legyen σ az ebből képzett közelítő összeg $\sigma = \sum_{i=1}^{n} < f(r(\tau_i)), (r(t_i) - r(t_{i-1})) >$. Az f függvény vonalintegrálja az r görbén az a szám, amihez σ közelít a felosztás finomításával. $\to$ Legyen r differenciálható és r' folytonos és f is folytonos. Ekkor $\int_r f = \int_a^b < f(r(t)), r'(t) > dt$.

(l) *Potenciál és vonalintegrál kapcsolata:*
Legyn r : [a;b] $\to R^k$ és f : $R^k \to R^k$ rendelő függvény, F pedig f primitív függvénye. Ekkor $\int_r f = F(r(b)) - F(r(a))$.
(Összetett függvény deriváltjának primitív függvénye: $\int_r f = \int_a^b < f(r(t)), r'(t) > dt = \int_a^b F'(r(t)) dt$.)

(m) *Térfogati integrál:*
Legyen σ egy felosztáls amit úgy értelmezünk, hogy a=$x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ és c=$y_0 < y_1 < ... < y_n = d$. Legyen $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ és $\eta_j \in [y_{j-1}; y_j]$. Ekkor $\sigma(x, y, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. Legyen f:[a,b] $\times$ [c,d] $\to$ R korlátos függvény. Ez integrálható a T=[a,b] $\times$ [c,d] téglalapon, ha $\exists$ I $\in R$ szám, amihez σ közelít a felosztás finomításával. $\forall \epsilon > 0$:$\exists \delta > 0$:$(x_i - x_{i-1}) < \delta$ és $(y_j - y_{j-1}) < \delta \ \forall i, j \to |\sigma - I| < \epsilon \ \forall \xi, \eta$. (Kiszámítása: $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dydx$, ahol az integrálás sorrendje felcserélhető.)

(n) *Integrálás nem téglalap alakú területre:*
Legyen D $\subset R^2$ korlátos halmaz és f:D$\to$R korlátos függvény. Legyen D része T téglalapnak és legyen $\tilde{f}$: T $\to$ R és $\tilde{f}$ (x,y)=$\begin{cases} \text{f(x,y), ha (x,y)} \in \text{D} \\ \text{0, ha (x,y)} \notin \text{D} \end{cases}$. Ekkor f integrálható D-n ha $\tilde{f}$ integrálható T-n és $\int_D f = \int_T \tilde{f}$.

(o) *Normál tartomány:*
Legyen α, β : [a:b] $\to$ R folytonos és $\alpha(x) \le \beta(x) \ \forall x \in [a : b]$. Az N:={ (x;y) $\in R^2$: x $\in$ [a;b] és y $\in [\alpha(x); \beta(x)]$, ahol $\alpha(x) \le \beta(x)\}$ halmazt normál tartománynak nezezzük. Ezen az integrál kiszámítható $\int_N f = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dydx$. Ahol N $\subset$ T=[a,b] $\times$ [c,d] téglalapnak.

(p) *Helyettesítéses integrál:*
Legyen f : $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to R$ függvény integrálható, a helyettesítő függvény, pedig g : $[c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \to [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Ahol legyen Q := $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ és T := $[c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ tartományok. Ekkor ha f integrálható és g bijektív és differenciálható: $\int_Q f = \int_T (f \circ g) |det(g')|$. (Itt Q és T magasabb dimenziósak is lehetnének.)

(q) *Felület, felület felszíne:*
Φ : $R^2 \to R^3$ rendelő folytonos függvényt felületnek nevezzük. Legyen most Φ : Ω := [a;b] $\times$ [c;d] $\to R^3$ egy folytonos függvény. Legyenek $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$ és $y_0 = c < y_1 < ... < y_m = d$ osztópontok. A felszínt kis paralelogrammákkal közelítem, úgy, hogy érintősíkot illesztek a felszínre a kijelölt pontokban. Itt $\Phi(x_i, y_j) - \Phi(x_{i-1}, y_j) \approx \partial_u \Phi(x_i, y_j)(x_i - x_{i-1})$ és $\Phi(x_i, y_j) - \Phi(x_i, y_{j-1}) \approx \partial_v \Phi(x_i, y_j)(y_j - y_{j-1})$, ahol u,v a paraméter sík koordinátái. Ekkor egy kis paralelogramma felszíne: $|\partial_u \Phi(x_i, y_j) \times \partial_v \Phi(x_i, y_j)|(x_{i-1} - x_i)(y_{j-1} - y_j)$. Így már képezhető ebből szummás közelítő összeg. Az a szám, amihez ez a közelítő összeg tart a felosztás finomításával lesz a felszín mértéke. Kiszámítása tehát: $\int_\Omega |\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)| dudv$ ahol Ω az integrálási tartomány.

(r) *Felületi integrál:*

i. *Skalár függvény felületi integrálja:*
Adott $\Phi : \Omega \to R^3$ felület és adott U : $R^3 \to R$ folytonos függvény. U függvény felületi integrálját Φ-n a következő képpen értlemezem: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} U(\Phi(\xi_i, \eta_j)) |\partial_u \Phi(x_i, y_j) \times \partial_v \Phi(x_i, y_j)|(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$, ahol u és v a paraméterező sík koordinátái és $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ valamint $\eta_j \in [y_{j-1}; y_j]$. $\int_\Phi U$ az a szám, amihez ez a közelítő összeg tart a felosztás sűrítésével. Ha Φ differenciálható, és Φ', valamint U is folytonosak, akkor $\int_\Phi U = \int_\Omega U(\Phi(u, v)) |\partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v)| dudv$

ii. *Vektor függvény felületi integrálja:*
Legyen Φ : $\Omega \to R^3$ felület és adott F : $R^3 \to R^3$ vektorfüggvény. Itt is képezzük az előzőhöz hasonló közelítő összeget: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} < F(\Phi(\xi_i, \eta_j))_i \ , \ \partial_u \Phi(x_i, y_j) \times \partial_v \Phi(x_i, y_j) > (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$. Ekkor $\int_\Phi F$ az a szám, amihez a közelítő összeg tart a felosztás finomításával. $\int_\Phi F = \int_\Omega < F(\Phi(u, v)) \partial_u \Phi(u, v) \times \partial_v \Phi(u, v) > dudv$.

(s) *Stokes-tétel:* Legyen Φ egy $\Omega \to R^3$ felület és ennek határoló görbéje r : [a,b] $\to R^3$. Ekkor, ha egy F vektorfüggvény differenciálható, akkor $\int_\Phi rot(F) = \int_r F$.

(t) *Gauss-tétel:* Legyen Φ egy $\Omega \to R^3$ zárt felület, ami egy V $\subset R^3$ halmazt határol. Ekkor ha F egy differenciálható $R^3 \to R^3$ rendelő vektorfüggvény: $\int_V divF = \int_\Phi F$.