③ Csillapított rezgések

$m\ddot{u} + \lambda\dot{u} + Du = 0$ / vagy $= K$ kosinusz, ami nem számít, mert a diff. egyenlet megoldásában csak egy függőleges eltolódásként jelenik meg!

$$\ddot{u} + \frac{\lambda}{m}\dot{u} + \frac{D}{m}u = \boxed{\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0}$$

$\Rightarrow$ Átírhatjuk úgy, hogy $L(D)u(t) = 0$

, ahol $L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2$ és feltesszük, hogy

$u(t) = e^{\lambda t}$ alakot vesz fel $\forall$ esetben!

$L(D)$ - lineáris differenciál operátor!

$$L(D)u(t) = L(\lambda)u(t) = \boxed{\lambda^2 u(t) + 2\beta\lambda u(t) + \omega_0^2 u(t) \overset{!}{=} 0}$$

$\uparrow$

sajátfüggvénye $L(D)$-nek

Ez az egyenlőség akkor áll fenn, ha $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$, mivel $e^{\lambda t}$ $\forall t \in \mathbb{R}$-re pozitív mo.-t ad!

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \boxed{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}$$

$\rightarrow$ λ-ra vett megoldások alapján tisztán látható, hogy az egyenlet megoldása három részre esik szét!

I) $-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \Rightarrow \beta^2 - \omega_0^2 > 0$

II) $\beta^2 - \omega_0^2 < 0$

[III) $\beta^2 - \omega_0^2 = 0$]* Ez a valóságban nyilvánvalóan nem fordul elő, mivel soha nem lehet a két értéket végtelen pontossággal kiegyenlíteni

1) $\beta^2-\omega_0^2>0 \Rightarrow \quad \beta^2-\omega_0^2=\Omega^2 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2}=-\beta\pm\Omega$

$u_1(t)=e^{-(\beta-\Omega)t} \qquad u_2(t)=e^{(-\beta+\Omega)t}$

$$\Rightarrow \quad u(t)=Ae^{-(\beta+\Omega)t}+Be^{(\Omega-\beta)t}=e^{-\beta t}\left(Ae^{-\Omega t}+Be^{\Omega t}\right)$$

$u(0)=u_0 \Rightarrow A+B=u_0 \qquad \dot{u}(0)=v_0 \Rightarrow -\beta(A+B)+\Omega(B-A)=v_0$

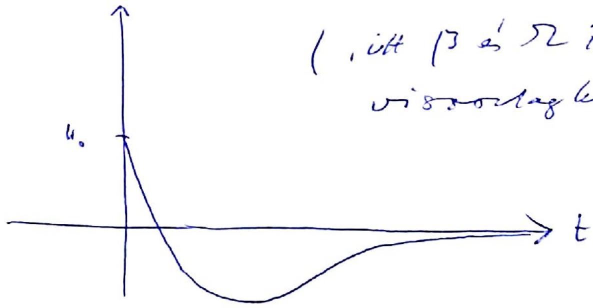
$$\dot{u}(t)=-\beta e^{-\beta t}\left(Ae^{-\Omega t}+Be^{\Omega t}\right)+e^{-\beta t}\left(-\Omega Ae^{-\Omega t}+\Omega Be^{\Omega t}\right)$$

Átrendezés után:

$$u(t)=e^{-\beta t}\left[\frac{(\Omega-\beta)v_0+u_0}{2\Omega}e^{-\Omega t}+\frac{(\Omega+\beta)v_0-u_0}{2\Omega}e^{\Omega t}\right]$$

$\boxed{\Omega<\beta}$! (ugyanis $\Omega=\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$)

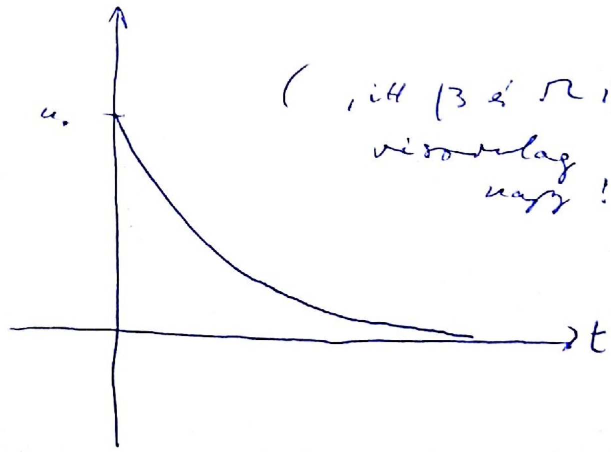
1. megoldás típus



(itt β és Ω is viszonylag kicsi!)

2. megoldástípus

(itt β és Ω is viszonylag nagy !)



II) $\beta^2-\omega_0^2<0 \Rightarrow \beta^2-\omega_0^2=-\Omega^2 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-\beta\pm i\Omega \quad \left(\Rightarrow \Omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\right)$

$u_1(t)=e^{(-\beta-i\Omega)t}$; $u_2(t)=e^{(-\beta+i\Omega)t}$

$\mathbb{R}\ni u(t)=Ae^{-\beta t}e^{-i\Omega t}+Be^{-\beta t}e^{i\Omega t}=e^{-\beta t}\left(Ae^{-i\Omega t}+Be^{i\Omega t}\right)$

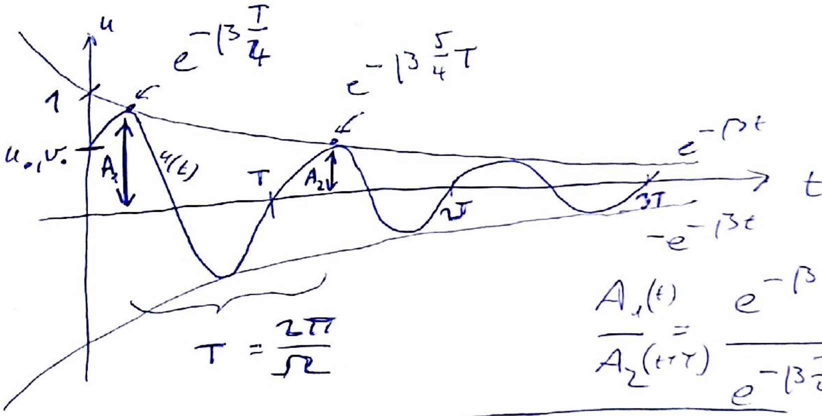
$u(t)=e^{-\beta t}\left((A+B)\cos\Omega t+i(A-B)\sin\Omega t\right)$ $\quad \boxed{A^*=B}$

$u(t)=e^{-\beta t}\left(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t\right) \quad a,b\in\mathbb{R}$

$u(0)=u_0 \quad v(0)=v_0$

$$u(t)=e^{-\beta t}\left(u_0\cos\Omega t+\frac{\beta u_0+v_0}{\Omega}\sin\Omega t\right)$$

Ennek is több típusú grafikon a megoldása $u_0=0$ / $v_0=0$ esetekben, de általában:



$$\frac{A_1(t)}{A_2(t+T)}=\frac{e^{-\beta\frac{T}{4}\cdot 1}}{e^{-\beta\frac{T}{4}\cdot 5}}=e^{-\beta T}$$

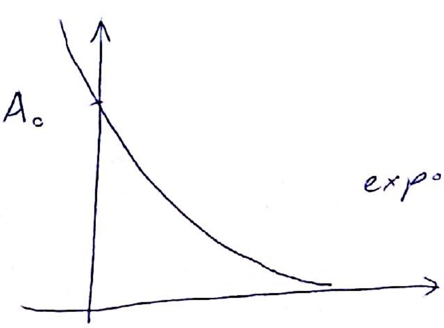
$u(t)$-t még felszorozhatjuk, akármilyen A_0 amplitúdóval, és nem változtat a megoldáson és annak menetén!

$$\boxed{\frac{A_1(t)}{A_2(t+T)}=e^{-\beta T}} \Rightarrow \ln\frac{A_1}{A_2}=-\beta T$$

(logaritmikus dekrementum)

III) $\beta^2-\omega_0^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-\beta \Rightarrow \lambda=-\beta$

$u=A_0e^{-\beta t}$



exponenciálisan lecseng!

Ilyen megoldás azonban a valóságban nincs, hiszen valamilyen kis eltérés biztos van ω_0 és β között, így használhatjuk valamelyik megoldást I) vagy III)-t:

$$\text{I)} \quad u(t) = e^{-\beta t}\left[\frac{(\Omega-\beta)v_0+u_0}{2\Omega}e^{-\Omega t} + \frac{(\Omega+\beta)v_0-u_0}{2\Omega}e^{\Omega t}\right]$$

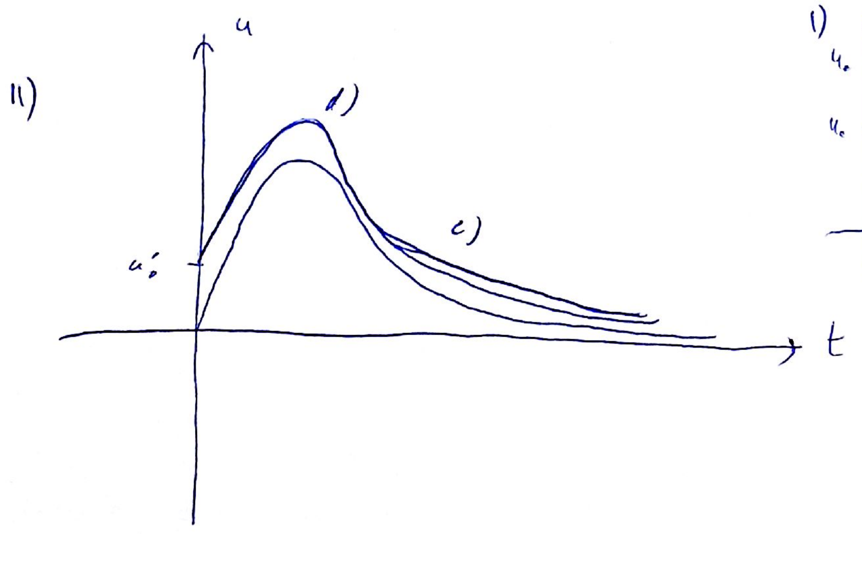
, ha itt azt mondjuk, hogy $\Omega \to 0$-hoz, akkor ~~$\frac{0}{0}$ ...~~ határértéket kapunk, de lényegében az ez a megoldás csak nagyon szélsőségesen!

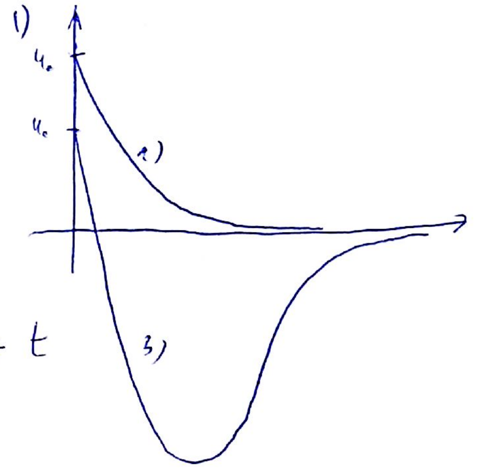
azonban, ha II)-re alkalmazzuk $\Omega \to 0$-hoz közelítő

$$\text{II)} \quad u(t) = e^{-\beta t}\left(u_0 \cos\Omega t + \frac{\beta u_0 + v_0}{\Omega}\sin\Omega t\right)$$

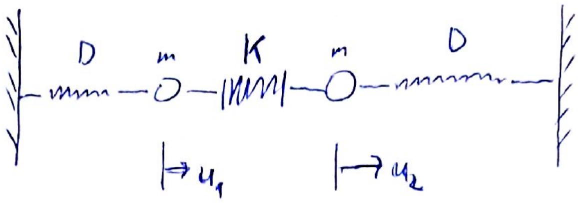
$$u_0\cos\Omega t \to 0, \qquad \frac{\sin\Omega t}{\Omega} \to 1$$

$$u(t) = e^{-\beta t}(\beta u_0 + v_0)\frac{\sin\Omega t}{\Omega}$$





⑥ Csatolt rezgések



I) $m\ddot{u}_1 = -Du_1 + K(u_2-u_1)$

; ha $u_2 > u_1$, akkor az $\oplus$

II) $m\ddot{u}_2 = -Du_2 + K(u_1-u_2)$ $\Rightarrow \frac{D}{m} = \omega_0^2$; $\frac{K}{m} = \Omega^2$

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2-\Omega^2 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & -\omega_0^2-\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Legyen $u_1(t) = A_1 \sin(\omega t)$

$u_2(t) = A_2 \sin(\omega t)$

→ Feltételezzük, hogy azonos frekvenciával rezegnek majd!

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2-\Omega^2 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & -\omega_0^2-\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$0 = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} -\omega_0^2-\Omega^2 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & -\omega_0^2-\Omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \right]}_{\overset{!}{=} 0} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

I) $(\omega^2-\omega_0^2-\Omega^2)A_1 + \Omega^2 A_2 = 0$

II) $\cancel{\omega_0^2}\,\Omega^2 A_1 + (\omega^2-\omega_0^2-\Omega^2)A_2 = 0$

I) $A_2 = \frac{\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2}{\Omega^2} A_1$

↓

II) $\Omega^2 A_1 = \frac{(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)}{\Omega^2}(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)A_1$

II) $\Omega^2 - \frac{(\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2)^2}{\Omega^2} \overset{!}{=} 0$

$\pm\Omega^2 = \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2$

$\boxed{\pm\Omega^2 - \Omega^2 + \omega^2 - \omega_0^2 = 0}$

Egyik esetben:

a) $\omega_0^2 - \omega^2 = 0$ b) $\omega_0^2 + 2\Omega^2 = \omega^2$

$\omega_{1,2} = \pm\omega_0$ $\omega_{3,4} = \pm\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$

$-(\omega_0^2+2\Omega^2)$

a) $A_2 = \dfrac{\omega_0^2+\Omega^2-\omega_0^2}{\Omega^2} A_1 \Rightarrow \boxed{A_1 = A_2}$ b) $A_2 = \dfrac{\omega_0^2+\Omega^2-\omega^2}{\Omega^2} A_1 \Rightarrow \boxed{A_2 = -A_1}$

Általában:

$\Rightarrow$ $u_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

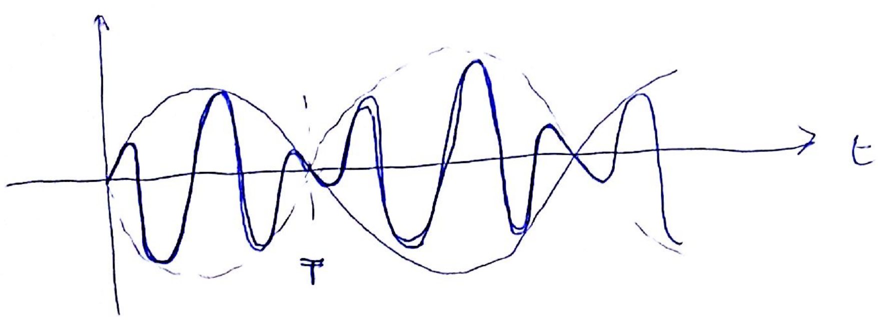
$\Downarrow$

$u_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

Míg $u_1(t)$-t önkényesen választom meg A_1, φ_1 értékeket; addig $u_2(t)$-t ezek már meghatározzák!

Spec.: ha $A_1 = B_1$ és $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$\Rightarrow u_1(t) = A\left[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)\right] = A \cdot 2 \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right)$$



⑧ Munka, potenciális energia

$\underline{v}\cdot / \quad m\underline{a} = \underline{F}$

$m\underline{v}\underline{a} = \underline{v}\underline{F} = P(t)$ ezt az új skalármennyiséget teljesítménynek nevezzük!

$\downarrow$

Észrevesszük, hogy $\frac{d}{dt}(\underline{v}\underline{v}) = \underline{a}\underline{v} + \underline{v}\underline{a} = 2\underline{a}\underline{v}$

$$\boxed{\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\underline{v}\underline{v}) = P(t)} \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\underbrace{m\underline{v}^2}\Big) = P(t)$$

Ezt a mennyiséget hívjuk mozgási / kinetikus energiának!

$$\int_{t_0}^{t}\Big(\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}m\underline{v}^2\Big)\Big)dt = \int_{t_0}^{t} P(t)\,dt = W$$

→ A teljesítmény fv. integrálját egy időintervallumra vétve munkának nevezzük!

$$\Rightarrow \quad W = \Big[\frac{1}{2}m\underline{v}^2\Big]_{t_0}^{t} = \frac{1}{2}m v^2(t) - \frac{1}{2}m v^2(t_0)$$

Lényegében ez a munkatétel, amely azt mondja ki, hogy:

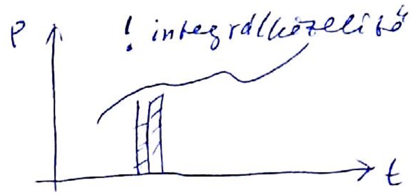
$$\boxed{\Delta E_{kin} = W}$$

Ezért van az, hogy a sebességvektorra merőlegesen ható erő munkája 0, mivel $\boxed{\underline{F}\underline{v} = 0}$.

Centrális erőtérben: $\rightarrow$ $\underline{F}(\underline{r})$ – csak a helykoordinátától függ az erő

$$W = \int_{t_0}^{t} \underline{v}(t)\, \underline{F}(\underline{r}(t))\, dt \approx \sum_{i=1}^{N} \underline{v}(t_i)\, \underline{F}(\underline{r}(t_i))\, (t_i - t_{i-1})$$

! integrálközelítő összeg !



mivel $\underline{v}(t_i)$ definíció szerint megegyezik:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \approx \frac{\underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \left(\underline{r}(t_i) - \underline{r}(t_{i-1})\right) \underline{F}(\underline{r}(t_i)) = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}(\underline{r}_i)\, (\underline{r}_i - \underline{r}_{i-1})$$

A lényeg, hogy így már kiesett a t változó és csak az általa meghatározott görbe maradt, amelynek minden pontjába rendeltünk egy $\underline{F}(\underline{r}_i)$ erőt!

$$W = \int_G \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} \leftarrow \text{vonalmenti integrál!!}$$

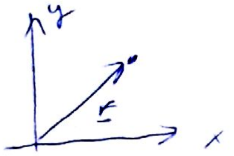
$$\boxed{E_{kin}(t) - E_{kin}(t_0) = \int_G \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r}}$$

Konzervatív erőtér esetén tetszőleges zárt görbén a vonalmenti integrálja a centrális erőnek zérus. Ez a gradiens-tételből következik:

$$\boxed{\int_G \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} = \phi(A) - \phi(B)}$$

Erről részletesen:

Centrális erőtérben (konzervatív erőtér. Zárt görbén az erő integrálja 0!) megtehető az, hogy a tér t pontjában mutató vektorhoz hozzárendeljek egy skalármennyiséget, a következő képpen:



$$-\int_0^{r} \underline{F}\,d\underline{r} = \phi(\underline{r})$$

Ezt nevezzük helyzeti energiának!

Így A és B pontok között a munka:

$$-\int_0^{r_A} \underline{F}\,d\underline{r} = \phi(A) \qquad -\int_0^{r_B} \underline{F}\,d\underline{r} = \phi(B)$$

$$\phi(B) - \phi(A) = -\int_0^{r_B} \underline{F}\,d\underline{r} + \int_0^{r_A} \underline{F}\,d\underline{r} = -\int_{r_A}^{r_B} \underline{F}\,d\underline{r} = -W$$

De tudjuk, mivel a munkatétel kimondja, hogy $W = \Delta E_{kin}$

$$\phi(B) - \phi(A) = E_{kin}(t_A) - E_{kin}(t_B)$$

Vagyis: $\phi(B) + E_{kin}(t_B) = \phi(A) + E_{kin}(t_A) = E$ energia a tér minden pontjában állandó egy pontszerű testre nézve!

$$\boxed{E_{kin} + \phi = E}$$

Energiamegmaradás -tétele

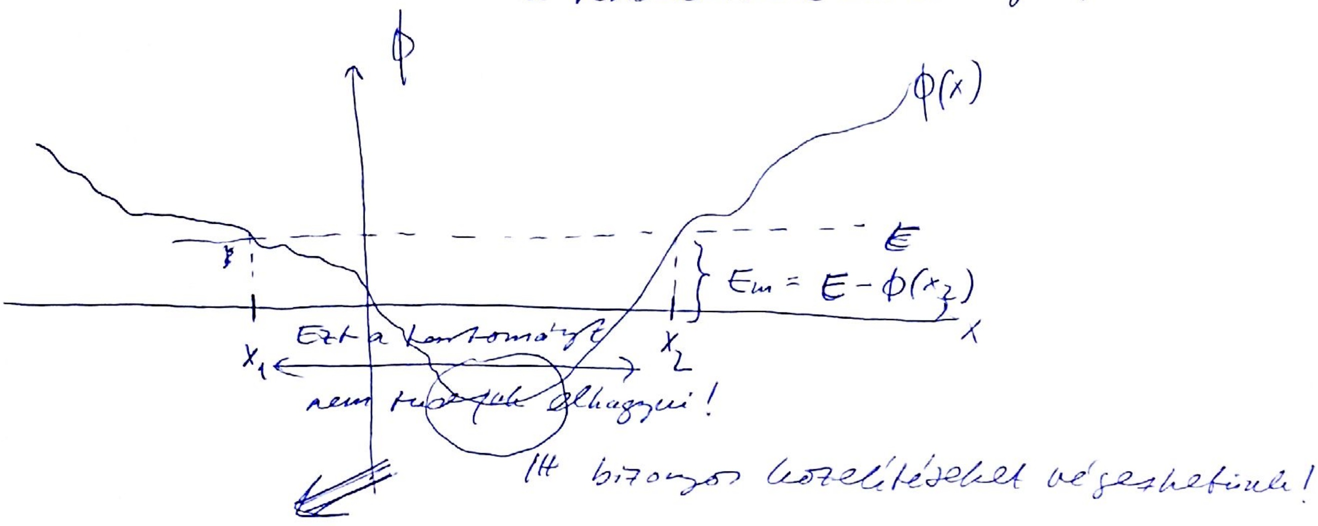
Ha egy $\phi(\underline{r})$ potenciálfüggvénynek $\underline{F}(\underline{r})$ centrális erő a negatív gradienseként áll elő; akkor ez egy konzervatív erőtér lesz, azaz $\underline{F}(\underline{r})$ rotációja $=0$-val és zárt görbére vett integrálja is $=0$-val!

1D-ben ezt könnyű belátni! $F(x)$ helytől függő erő; ill ez előáll $\phi(x)$ helytől függő potenciál fv. negatív deriváltjaként!

$$F(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx}$$

Ilyen feltételek mellett ∀ esetben megmarad az energia!

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \phi(x) = \text{áll.} = E$$ ← amekkora kezdeti energiája van a rendszernek az önkényes!



;közelíthetjük parabolával ; ekkor $\phi(x) \approx \frac{D}{2}(x-x_0)^2+\phi_0$ értékű függvénnyel ebben a kis tartományban.

Ezt harmonikus közelítésnek nevezzük; mivel ha van egy potenciálfv.-nek és annak minimuma; akkor azt ott közelíthetjük parabolával és mondhatjuk, hogy a rendszer harmonikus rezgőmozgást végez!

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - \phi(x)$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2E - 2\phi(x)}{m}}$$

Ez már csak egy elsőrendű differenciál egyenlet; ellentétben Newtonnal!

⇒ Ebben is megvan viszont a 2 szükséges szabad paraméter E é x_0!

$$\int_{t_0}^{t} 1\,dt = \int_{t_0}^{t} \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2E-2\phi(x)}{m}}} \left(\frac{dx}{dt}\right) dt$$

$$\boxed{t - t_0 = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{2E-2\phi(x)}{m}}}\,dx}$$

Ezzel az a baj, hogy integrálni
nehéz és zárt megoldása
csak kevés esetben van!

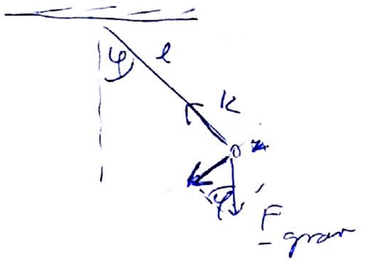
–V–

③ Gravitáció, tehetetlen és súlyos tömeg, gömbhéj, tömör gömb tere

Tehetetlen tömeg: a tehetetlenség mértékét jelző tömeg, amely azt mutatja, hogy adott F erő mekkora gyorsulást hoz létre a testen

Súlyos tömeg: testek mennyire vonzzák egymást

Matematikai inga:



$$\underline{F}_{grav} = -\gamma \frac{m_s M}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} = m_s \underline{g}(\underline{r})$$

Itt most:

$$m_t a_{tangenciális} + m_s g(\underline{r}) \sin\varphi = 0$$

$$m_t \ddot{\underline{r}} = -m_s g \sin\varphi$$

Igen kis kitérés esetén

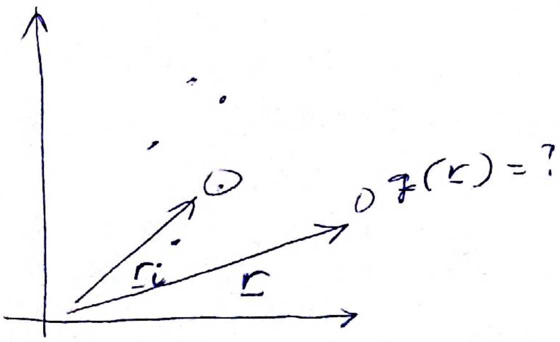
$$m_t l \ddot{\varphi} = -m_s g \varphi$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_s}{m_t}}, \text{ amiből } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{m_t}{m_s}}$$

⇒ Mérésileg igazolható, hogy (~~Eötvös-féle torziós ingával nézték meg~~) $m_s = m_t$.

Gravitációs erő: $\underline{F}(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$

→ gravitációs térerősség: $\frac{\underline{F}(\underline{r})}{m_1} = -\gamma \frac{m_2}{r^2} \frac{\underline{r}}{r} = \underline{g}(\underline{r})$



$$\underline{g}(\underline{r}) \approx \sum_{i=1}^{N} -\gamma \frac{m_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|^2} \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}$$

→ gravitációs potenciálnak nevezzük ebből:

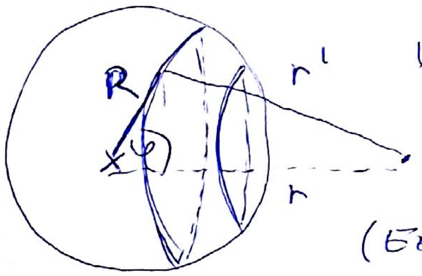
$$U(\underline{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|}$$; így belátható, hogy

$$\boxed{g(\underline{r}) = -\operatorname{grad} U(\underline{r})}$$; ha feltételezzük, hogy adott térfogatú térrészben $\varrho(\underline{r})$ sűrűségfüggvény ír le egy anyagot:

$$U(\underline{r}) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{\overbrace{m_i}^{\approx \varrho(\underline{r})\Delta V}}{|\underline{r}-\underline{r}_i|} = \boxed{-\gamma \int \frac{\varrho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, dV'}$$

→ térfogati integrál!

→ Homogén gömbhéj gravitációs potenciálja és gravitációs térerőssége



1) $r' = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi}$

2) $\Delta\Omega = 2\pi R^{\cancel{2}} \sin\varphi \, R\Delta\varphi$

(Ez az héj sokkal leegyszerűbb!)

$$\Delta U = -\gamma \frac{M}{4\pi R^2} \Delta\Omega \frac{1}{r'} = -\gamma \left(\frac{M}{4\pi R^2}\right) \frac{1}{r'} \Delta\Omega$$

↓ Felületi sűrűség

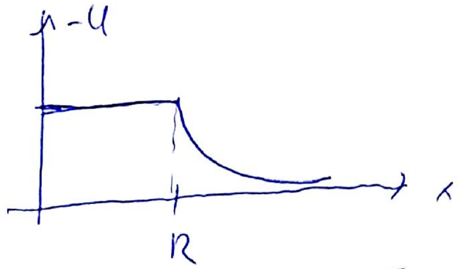
$$U(\underline{r}) = \int_0^{\pi} -\gamma \frac{M}{\cancel{4\pi}_{2} R^2} \frac{\cancel{2\pi} R^2 \sin\varphi}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}}\, d\varphi$$

$$U(\underline{r}) = -\frac{\gamma M}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}}\, d\varphi$$

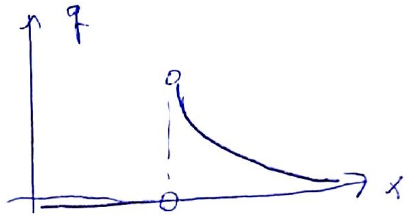
$$\Rightarrow U(\underline{r}) = -\frac{1}{2}\gamma M \frac{1}{rR} \left[\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}\right]_0^{\pi}$$

$$U(\underline{r}) = -\frac{\gamma M}{2rR}\left(R + r - |R - r|\right)$$

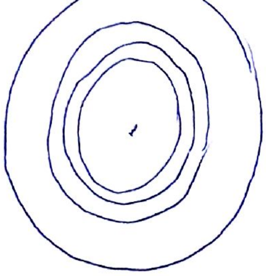
$$U(r) = \begin{cases} -\gamma M \frac{1}{r} & ;\text{ha } R<r \\ -\gamma M \frac{1}{R} & ;\text{ha } R>r \end{cases}$$



$$g = -\,\mathrm{grad}\, U(r) = \begin{cases} \frac{\gamma M}{r^2} & ;\text{ha } R<r \\ 0 & ;\text{ha } R>r \end{cases}$$

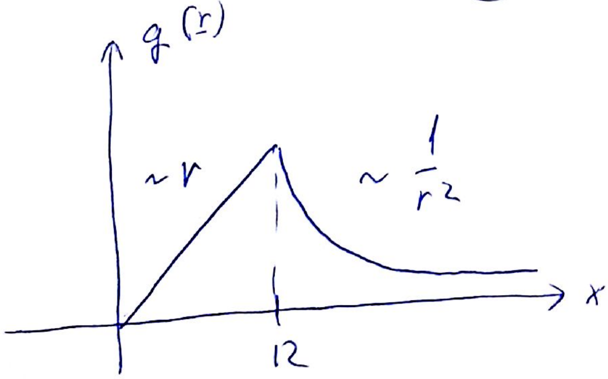


→ Tömör gömb gravitációs térerőssége:

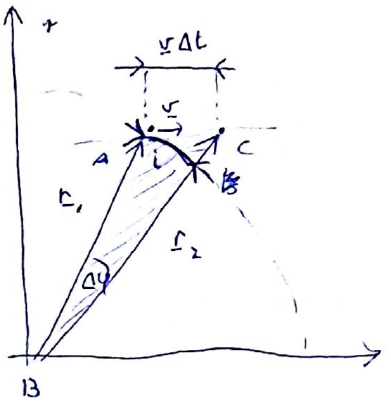


Koncentrikus gömbhéjakra bontom, azoknak már ismerem a gravitációs térerősségét:

$$g(r) = \begin{cases} \frac{\gamma M}{r^2} = \frac{\gamma \rho\, 4\pi R^3}{3\, r^2} & ;\text{ha } R>r \\ \frac{\gamma M}{r^2} & ;\text{ha } R<r \end{cases}$$



⑩ Bolygók mozgása



$\Delta\varphi \ll 1$: $\underline{r}_1 \approx \underline{r}_2 = \underline{r}$

$i = \Delta\varphi\, r$

$\Delta T_{ABC} \approx \dfrac{r^2 \Delta\varphi}{2}$

Kepler II.

$$\frac{\Delta T_{ABC}}{\Delta T} = \frac{r^2 \Delta\varphi}{2\Delta T}$$

$\Rightarrow \boxed{\dot{T} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}}$; mivel tudjuk, hogy

centrális erőtérben az impulzusmomentum nagysága megmarad; így tudjuk, hogy ez a területsebességnek nevezett mennyiség is megmarad! $\left(|\underline{N}| = m r^2 \dot{\varphi} \right)$

gravitációs helyzeti energia: $\Phi(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$; ennek gradiense

$\underline{F}(\underline{r})$.

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$\text{áll.} = E = \frac{1}{2} m_1 v^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} \qquad m_2 = M \; ; \; m_1 = m$$

$$v^2 - \frac{2\overbrace{\gamma M}^{\mu}}{r} = \boxed{\frac{2E}{m} = h}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 - \frac{2\mu}{r} = h}$$

$\underline{v}$-t polárkoordinátarendszerben felírva:

$$\underline{v} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$$

$$\underline{v}^2 = \dot{r}^2 |\underline{e}_r|^2 + r^2\dot{\varphi}^2 |\underline{e}_\varphi|^2 + \dot{r} r \dot{\varphi} \underbrace{\underline{e}_r \underline{e}_\varphi}_{=0} = \boxed{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{2\mu}{r} = h$$

, mivel $|\underline{N}| = m r^2 \dot{\varphi} =$ áll. centrális erőtérben, ezért

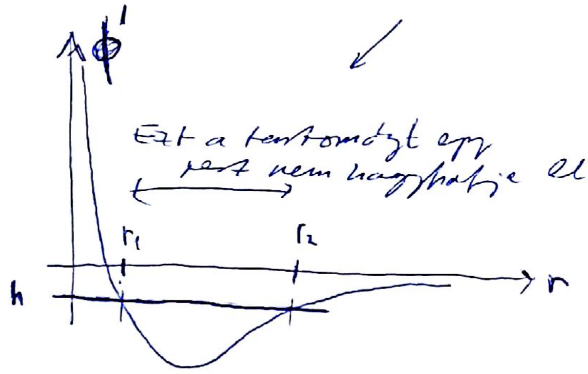
$$r^2\dot{\varphi} = C \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dot{r}^2}_{} + \underbrace{\left(\frac{c}{r}\right)^2 - \frac{2\mu}{r}}_{} = \underbrace{h}_{}$$

$$\sim \quad E_{kin} + \phi(r) = E$$

hasonlít!

$$\Rightarrow \phi'(r) = \frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r}$$: valamiféle effektív helyzeti energia mennyiség...



Van egy r_1 (min) és egy r_2 (max) távolság amerre eltávolodhat a test.

$$\dot{r} = \pm\sqrt{h - \left(\frac{c}{r}\right)^2 + \frac{2\mu}{r}}$$

; mivel $r(\varphi(t))$ függvényében is megadhatom ; ezért kompozíció deriválási szabálya alapján:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{c}{r^2} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{c}{r}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r}\right)$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r}\right) = \pm\sqrt{h - \left(\frac{c}{r}\right)^2 + \frac{2\mu}{r}}$$

$$A^2 = h + \left(\frac{\mu}{c}\right)^2$$

$$\frac{d}{d\varphi}\underbrace{\left(\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r}\right)}_{K(\varphi)} = \pm\sqrt{A^2 - \underbrace{\left(\frac{\mu}{c} - \frac{c}{r}\right)^2}_{K(\varphi)}}$$

$$\frac{dK}{d\varphi} = \pm\sqrt{A^2 - K(\varphi)}$$

$$\rightarrow K = A \cdot \cos(\varphi + \varphi_0) \;:\; \varphi_0 = 0$$

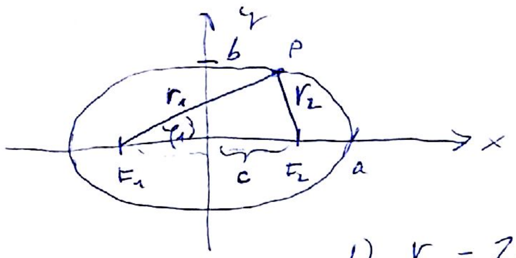
$$K = A \cdot \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu}{c} - \frac{c}{r} = \underbrace{\left(h + \left(\frac{\mu}{c}\right)^2\right)}_{A} \cos\varphi$$

$$\frac{c}{r} = \frac{\mu}{c} - A\cos\varphi$$

$$r = \frac{c}{\frac{\mu}{c} - A\cos\varphi} = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{cA}{\mu} = \frac{c}{\mu}\sqrt{h + \left(\frac{\mu}{c}\right)^2} = \sqrt{1 + h\frac{c^2}{\mu^2}}$$

Ellipszis polárkoordinátákkal:



$$\text{I)} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \text{I)} \quad r_1 + r_2 = d = 2a$$

$$\text{II)} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

$$\text{I)} \quad r_2 = 2a - r_1$$

$$\text{II)} \quad (2a - r_1)^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4r_1 c\cos\varphi$$

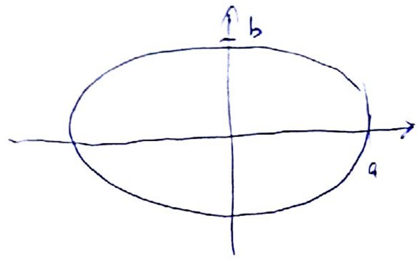
$$4a^2 - 4ar_1 + \cancel{r_1^2} = \cancel{r_1^2} + 4c^2 - 4r_1 c\cos\varphi$$

$$a^2 - c^2 = r_1(a - c\cdot\cos\varphi_1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cdot\cos\varphi}} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\cos\varphi} \quad ; \quad 0 < \frac{c}{a} < 1 \text{ (ellipszisnél)}$$

Kepler III.

$$q = \frac{dA}{dt} \qquad T_0 = ab\pi$$



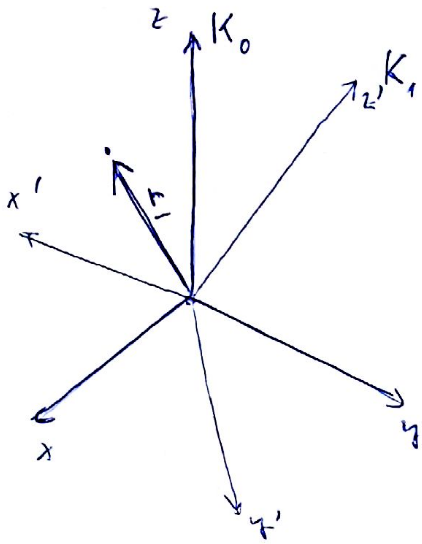
$$q = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}C$$

$$\frac{1}{2}CT = T_0 \qquad \frac{C^2}{\mu} = \frac{b^2}{a}$$

$$C^2T^2 = 4\pi^2 a^2 b^2$$

$$\mu T^2 \frac{\cancel{b^2}}{a} = 4\pi^2 a^2 \cancel{b^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}}$$

(11) Gyorsuló koordinátarendszerek



Adott $\underline{r}$ vektort, ha reprezentáljuk ortonormált bázison, akkor ha az egy másik ortonormált bázison reprezentáljuk, akkor:

$\underline{r}' = \underline{\underline{O}}\,\underline{r}$, ahol $\underline{\underline{O}}$ egy térbeli forgatásmátrix!

$$\underline{r}'(t) = \underline{\underline{O}}(t)\underline{r}(t) \Rightarrow \dot{\underline{r}}'(t) = \dot{\underline{\underline{O}}}(t)\underline{r}(t) + \underline{\underline{O}}(t)\dot{\underline{r}}(t)$$

, mivel $\underline{\underline{O}}$ egy forgatás, ezért kihasználjuk azt a tulajdonságát, hogy a transzponáltja az inverze!

$$\tilde{\underline{\underline{O}}}(t)\dot{\underline{r}}'(t) = \tilde{\underline{\underline{O}}}\dot{\underline{\underline{O}}}(t)\underline{r}(t) + \underbrace{\tilde{\underline{\underline{O}}}(t)\underline{\underline{O}}(t)}_{\underline{\underline{I}}}\dot{\underline{r}}(t)$$

Tudjuk, hogy $\tilde{\underline{\underline{O}}}\,\underline{\underline{O}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\tilde{\underline{\underline{O}}}\,\underline{\underline{O}}) = 0 = \dot{\tilde{\underline{\underline{O}}}}\underline{\underline{O}} + \tilde{\underline{\underline{O}}}\dot{\underline{\underline{O}}}$

Mivel ez egy teljesen antiszimmetrikus mennyiség, ezért 3 dimenzió- ← $\boxed{\tilde{\underline{\underline{O}}}\dot{\underline{\underline{O}}} = -\dot{\tilde{\underline{\underline{O}}}}\underline{\underline{O}}}$

$\cancel{(\tilde{\underline{\underline{O}}}(t)\dot{\underline{r}}'(t) = \tilde{\underline{\underline{O}}}\dot{\underline{\underline{O}}}(t)\underline{r}(t) + \dot{\underline{r}}(t))}$ ban, a Hodge-dualitás alapján az megfeleltethető egy ilyen mátrix-szal:

$$(\tilde{\underline{\underline{O}}}\dot{\underline{\underline{O}}})_{ij} = (\underline{\underline{\Omega}})_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\underline{\omega})_k = \varepsilon_{ijk}\Omega_{ij}$$

, és

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\underline{\underline{O}}}\,\underline{v}'(t) = \underline{\omega} \times \underline{r} + \underline{v}}$$

Ebben a felírásban az összes vektor a K_0 koordinátarendszerben van felírva, még a $\underline{v}'(t)$ is, mivel az $\tilde{\underline{\underline{O}}}(t)$ által vissza van forgatva!

Feltételezzük, hogy $\underline{\underline{O}}(t)\,\underline{v}'(t) = \underline{v}^*(t)$-ből úgy kaphatjuk meg $\underline{a}^*(t)$ vektort, hogy ugyanazokat a műveleteket hajtjuk végre $\underline{r}(t)$ vektoron!

$$\underline{a}^*(t) = \left(\frac{d}{dt} + \underline{\omega}\times\right)\left(\frac{d}{dt} + \underline{\omega}\times\right)\underline{r} = \frac{d^2}{dt^2}\underline{r} + \left(\frac{d}{dt}\underline{\omega}\right)\times\underline{r} +$$

$$\underline{\omega}\times\left(\frac{d}{dt}\underline{r}\right) + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) = \underline{a} + \underline{\beta}\times\underline{r} + \underline{\omega}\times\underline{v} + \underline{\omega}\times\underline{v}$$

$$+\ \underline{\omega}(\underline{\omega}\,\underline{r}) - \underline{r}(\underline{\omega}\,\underline{\omega})$$

$$\underline{a}^*(t) = \underline{a} + \underline{\beta}\times\underline{r} + 2(\underline{\omega}\times\underline{v}) + \underbrace{\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})}_{\omega^2(\underbrace{\underline{r} - \underline{e}_\omega(\underline{e}_\omega\underline{r})}_{\underline{r}_\perp})} + \underline{a}_0$$

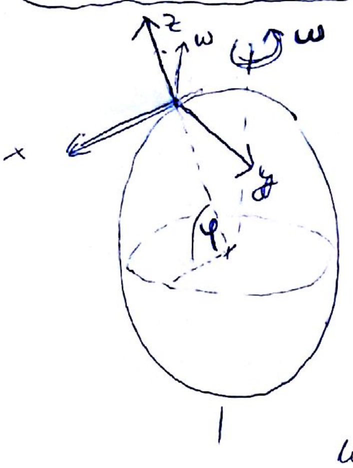
konstans gyorsulásvektor jelenlét mutatja, hogy adott koordinátarendszer kp-ja gyorsan mozog a rögzítetthez képest!

$$m\underline{a}^*(t) - m\underline{a}_0 = m\underline{a} + 2m(\underline{\omega}\times\underline{v}) + m\omega^2\underline{r}_\perp + m(\underline{\beta}\times\underline{r})$$

$$\Rightarrow\ m\underline{a} = \underline{F} - m\underline{a}_0 + \underbrace{2m(\underline{v}\times\underline{\omega})}_{\text{Coriolis-erő}} + \underbrace{m(\underline{r}\times\underline{\beta})}_{\text{Euler-erő}} \underbrace{- m\omega^2\underline{r}_\perp}_{\text{Centrifugális erő}}$$

Ezeket az erőket nevezzük tehetetlenségi erőknek!

(12) Szabadesés a forgó Földön



$$\underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \leftarrow \text{a felszín közelében!}$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega\cos\varphi \\ 0 \\ \omega\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \underline{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

A Coriolis-erőhöz kell $\underline{v} \times \underline{\omega}$ ismerni. A lényeg, hogy egy szabadon eső testre nem hat centrifugális erő csak a Coriolis erő!

$$m\underline{a} = m\underline{g} + 2m(\underline{v} \times \underline{\omega}) \Rightarrow \boxed{\underline{a} = \underline{g} + 2(\underline{v} \times \underline{\omega})}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega\cos\varphi \\ 0 \\ \omega\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y}\omega\sin\varphi \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{z}\cos\varphi - 2\dot{x}\omega\sin\varphi \\ \ddot{z} = -g + 2\dot{y}\omega\cos\varphi \end{cases}$$

Kezdőfeltételeink is vannak, mégpedig $\underline{v}(0) = 0$ és $\underline{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$

$$\dddot{y} = -2\omega\ddot{z}\cos\varphi - 2\ddot{x}\omega\sin\varphi$$

$$\dddot{y} = -2\omega\cos\varphi(-g + 2\dot{y}\omega\cos\varphi) - 2(2\dot{y}\omega\sin\varphi)\omega\sin\varphi$$

$$\dddot{y} = 2\omega g\cos\varphi - 4\omega^2\dot{y}\cos^2\varphi - 4\dot{y}\omega^2\sin^2\varphi \Rightarrow \boxed{\dddot{y} = 2\omega g\cos\varphi - 4\omega^2\dot{y}}$$

$$\rightarrow \dot{y} = A\cos(2\omega t + \psi) + B$$

$$\dddot{y} = -A4\omega^2\cos(2\omega t + \psi)$$

$$\Rightarrow -A4\omega^2\cancel{\cos(2\omega t + \psi)} = 2\omega g\cos\varphi - 4\omega^2 B - 4\omega^2 A\cancel{\cos(2\omega t + \psi)}$$

$$4\omega B = 2g\cos\varphi$$

$$\boxed{B = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}}$$

$$\dot y = A\cos(2\omega t + \psi) + \frac{g\cos\varphi}{2\omega}$$

Tudjuk, hogy $\ddot y = -2\dot x\omega\sin\varphi - 2\dot z\omega\cos\varphi = 0$, $t=0$-ban! És azt is tudjuk, hogy $\underline{v}(0)=0 \Rightarrow \boxed{\dot y(0)=0}$

$$0 = A\cos(2\omega 0 + \psi) + \frac{g\cos\varphi}{2\omega}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{g\cos\varphi}{2\omega\cos\psi} \underset{\psi \doteq 0}{=} -\frac{g\cos\varphi}{2\omega}$$

$\dot y = \frac{\cos\varphi\, g}{2\omega}\left(1-\cos(2\omega t)\right)$; akkor, ha ωt nagyon kicsiny, ami azért van, mert ω pici vagy nagyon rövid ideig tartott az esés

$$\cos(2\omega t) \approx 1 - \frac{(2\omega t)^2}{2} = 1 - 2\omega^2 t^2$$

$$\dot y = \frac{g\cos\varphi}{2\omega}\left(2\omega^2 t^2\right) = g\cos\varphi\,\omega t^2$$

$\Rightarrow \dot y(0) = 0$ és $y(0) = 0$

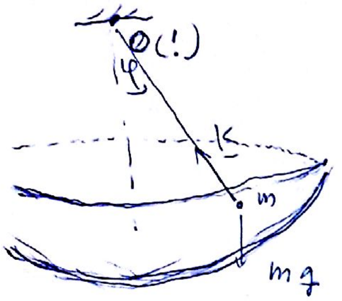
$$\Rightarrow \int \dot y\, dt = y(t) + y(0)$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{3} g\cos\varphi\,\omega t^3}$$

$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$

$x(t) = 0$

(13) Foucault-kísérlet



Feltételünk az ingára:

I) $x^2+y^2+z^2=\ell^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$-re

$\uparrow$ Ez egy gömbfelületet határoz meg. Tudjuk, hogy ha egy kényszererő fellép, az a mozgás síkjára merőleges, mivel nem végez munkát!

Tehát $f(\underline{r}) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}-\ell = 0 \Rightarrow K = \lambda' \operatorname{grad}(f(\underline{r})) = \boxed{\lambda^* \underline{r}}$

Ha a testet, csak igen kis mértékben térítem ki és ℓ fonál igen hosszú akkor mondhatom azt hogy z koordinátába $\simeq$ állandó. $\boxed{z=-\ell}$!

Most: $m\underline{a} = m\underline{g} + 2m(\underline{v}\times\underline{\omega}) + \underline{K}$

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix} + 2m\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\omega\cos\varphi\\0\\ \omega\sin\varphi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda^* x\\ \lambda^* y\\ \lambda^* z\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

II) $\ddot{x} = 2\dot{y}\omega\sin\varphi + \lambda x$

III) $\ddot{y} = -2\dot{z}\omega\cos\varphi - 2\dot{x}\omega\sin\varphi + \lambda y$

IV) $\ddot{z} = -g + 2\dot{y}\omega\cos\varphi + \lambda z = 0$

IV) $0 = -g + \underbrace{2\dot{y}\omega\cos\varphi}_{} + \lambda(-\ell)$

$-g$-hez képest igen kis kitérések esetén ez a gyorsulás korrekció is elhagyható!

$\Rightarrow \boxed{\lambda = -\dfrac{g}{\ell}}$

II) $\ddot{x} = 2\dot{y}\omega\sin\varphi + \lambda x = 2\dot{y}\omega_1 + \lambda x$

III) $\ddot{y} = -2\dot{z}\omega\cos\varphi - 2\dot{x}\omega\sin\varphi + \lambda y = -2\dot{x}\omega_1 + \lambda y$

IV) $\lambda = -\dfrac{g}{\ell}$

II) $\ddot{x} - 2\omega_1 \dot{y} + \frac{g}{l} x = \ddot{x} + i^2 2\omega_1 \dot{y} + \frac{g}{l} x = 0$

III) $\ddot{y} + 2\omega_1 \dot{x} + \frac{g}{l} y = \ddot{y} i + i^2 2\omega_1 \dot{x} + i\frac{g}{l} y = 0$

$$c = x + iy \qquad \dot{c} = \dot{x} + i\dot{y} \qquad \ddot{c} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

II) + III)

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + 2\omega_1 i(\dot{x} + i\dot{y}) + \frac{g}{l}(x + iy) = 0$$

$$\boxed{\ddot{c} + 2\omega_1 i \dot{c} + \frac{g}{l} c = 0}$$

Keressük a megoldást $c(t) = c_0 e^{i\alpha t}$

$$0 = -c_0 \alpha^2 e^{i\alpha t} + 2\omega_1 i^2 c_0 \alpha e^{i\alpha t} + \frac{g}{l} c_0 e^{i\alpha t}$$

$$0 = -\alpha^2 - 2\omega_1 \alpha + \frac{g}{l}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{2\omega_1 \pm \sqrt{4\omega_1^2 + 4\frac{g}{l}}}{-2\cdot 1} = -\omega_1 \pm \sqrt{\omega_1^2 + \frac{g}{l}}$$

Ha $\omega_1 \ll \sqrt{\frac{g}{l}}$ akkor ω_1^2 $\sqrt{\frac{g}{l}}$ mellett elhanyagolható!

$$\Rightarrow c_1(t) = c_1 e^{\left(-\omega_1 - \sqrt{\frac{g}{l}}\right)it} \qquad c_2(t) = c_2 e^{\left(-\omega_1 + \sqrt{\frac{g}{l}}\right)ti}$$

$$c(t) = e^{-i\omega_1 t}\left(c_1 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right)$$

$$c(0) = c_1 + c_2 = a + 0i$$

$$\dot{c}(t) = -i\omega_1 e^{-i\omega_1 t}\left(c_1 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + c_2 e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right) + e^{-i\omega_1 t}\left(-i\sqrt{\frac{g}{l}}\, c_1 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + i\sqrt{\frac{g}{l}}\, c_2 e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right)$$

$$\dot{c}(0) = (0 + 0i) = i\omega_1 (\underbrace{c_1 + c_2}_{a}) + i\sqrt{\frac{g}{l}}(c_2 - c_1) = 0 + 0i$$

$$\Rightarrow \omega_1 a = \sqrt{\frac{g}{l}}(c_1 - c_2) \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}} a = b} = c_1 - c_2$$

I) $a = c_1 + c_2$ II) $b = c_1 - c_2 = \dfrac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\, a$

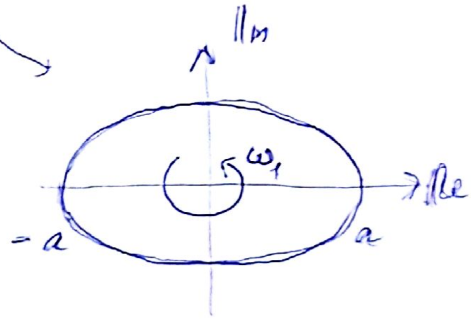
$$c_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\, a\right) \qquad c_2 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\, a\right)$$

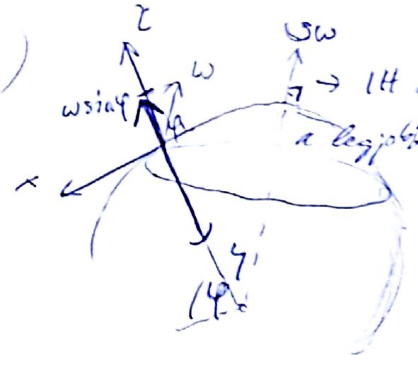
$$\Rightarrow z(t) = e^{-i\omega_1 t}\left\{\frac{1}{2}\left(a + \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\, a\right) e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}\,t} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\, a\right) e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}\,t}\right\}$$

$$z(t) = e^{-i\omega_1 t}\left\{a\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) - i\,\frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{g}{l}}}\, a \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)\right\}$$

Emiatt ω_1-el forog az egész koordináta-rendszer!

($\omega_1 = \omega \sin\varphi$)



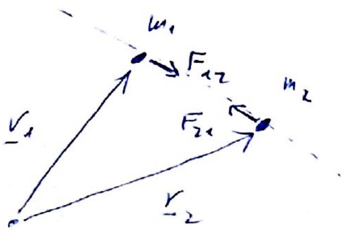


→ Itt a Foucault-inga a leggyorsabban forog!

(14) Kéttest probléma

Feltesszük, hogy a két test között ható erő centrális és csak a távolság-tól függ ~~a két test között~~.

Távolságuk: $|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|$



$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$$

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_{12} \quad \text{, míg} \quad m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\underline{F}_{12} = \underline{F}_{2,1}$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \ddot{\underline{r}}_1 + m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = 0$$

$$\left(\boxed{\frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}} \right)^{\cdot\cdot} = 0$$

$\uparrow$

$\underline{r}_{TKP}$ (!)

Vagyis ilyen feltételek mellett azt kaptuk, hogy a TKP gyorsulása 0! Ebből következően a sebessége csak konstans lehet!

$$\Rightarrow \left(m_1 \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \dot{\underline{r}}_2 \right)^{\cdot} = 0 \quad ; \quad \left(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 \right)^{\cdot} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \text{áll.}}$$

Mivel az erő csak az adott helyvektorok különbségétől függ, jelöljük:

$$\underline{F}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2): \qquad m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \ / \cdot m_2$$

$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = -\underline{F}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) \ / \cdot m_1$$

$$m_1 m_2 \ddot{\underline{r}}_1 - m_1 m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = (m_2 + m_1)\, \underline{F}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left(\underline{r}_1 - \underline{r}_2 \right)^{\cdot\cdot} = \underline{F}(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

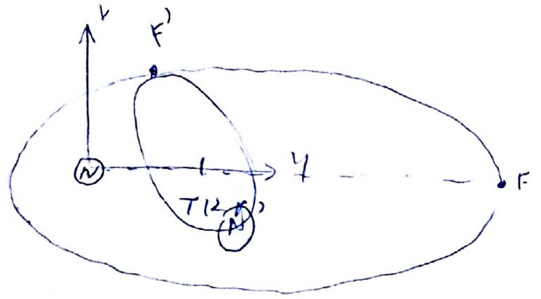
$$\boxed{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\underline{r}}_0 = \underline{F}(\underline{r}_0)}$$

m^*-al jelöljük és redukált tömegnek hívjuk!

A kéttest probléma során tehát nem magát a testet, hanem egy úgynevezett <u>kvázirészecskét</u> vizsgálok!

$$\text{I)}\ \ddot{\underline{r}}_{TKP}(t) = 0 \qquad \text{II)}\ m^* \ddot{\underline{r}}(t) = \underline{F}(\underline{r})$$

pl.:



$$\underline{r}_{TKP} = \frac{m\underline{R}}{m+M}$$

$$\underline{r}_F = \underline{R} - \frac{m}{m+M}\underline{R} = \underline{R}\frac{M}{m+M}$$

$$\underline{r}_N = -\frac{m}{m+M}\underline{R}$$

A tkp. körül mindkét égitest ellipszis pályán kering!

Ha a Napot tekintjük origónak, és az nem mozog:

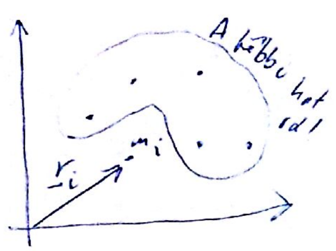
$$m\ddot{\underline{r}}_F = -\gamma\frac{mM}{r_F^2}\frac{\underline{r}_F}{r_F} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$

Ha TKP-ból nézzük; akkor

$$m\ddot{\underline{r}}'_F = -\gamma\frac{mM\,\underline{r}'_F}{r'^3_F} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}\cdot\underbrace{\left(\frac{m+M}{M}\right)}$$

Ez a korrekció a Naprendszerünkben még a Jupiternél is nagyon-nagyon kicsiny!

(15) Pontrendszerek törvényei



(k) - külső erő

Impulzustétel

$$\underline{F}_1^{(k)} + \sum_j \underline{F}_{1j} = m_1 \ddot{\underline{r}}_1$$

$$\underline{F}_2^{(k)} + \sum_j \underline{F}_{ij} = m_2 \ddot{\underline{r}}_2$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\underline{F}_i^{(k)} + \sum_j \underline{F}_{ij} = m_i \ddot{\underline{r}}_i}$$

$$\sum_i \underline{F}_i^{(k)} + \sum_i \sum_j \underline{F}_{ij} = \sum_i m_i \ddot{r}_i$$

→ Konzervatív erőtérben a belső erők összege $\forall$ esetben 0, mivel $\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji}$!

$$\sum_i \underline{F}_i^{(k)} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \dot{r}_i\right) = \frac{d}{dt} \underline{p} \quad : \quad \underline{p} = \sum_i m_i \underline{v}_i$$

→ Tehát a külső erők eredője megegyezik a rendszer impulzusváltozásával!

$$\boxed{\underline{F}_e^{(k)} = \frac{d\underline{p}}{dt}}$$

Ilyen rendszerben a pontok mozgását jellemezhetjük 1 pont mozgásával.

$$M_t = \sum_i m_i$$

$$\underline{p} = M_t \left(\frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i} \right) = M_t \underline{v}_0 \qquad \underline{v}_0 = \frac{\left(\sum_i m_i \underline{r}_i\right)^{\bullet}}{\sum_i m_i}$$

$$\Rightarrow \underline{r}_0 = \boxed{\underline{r}_{TKP} = \frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum_i m_i}}$$

Térjünk vissza az erodeti egyenletekhez:

$$\underline{r}_i \times / \quad m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \sum_j \underline{F}_{ij}$$

$$\underbrace{m_i(\underline{r}_i \times \ddot{\underline{r}}_i)}_{m_i(\underline{r} \times \dot{\underline{v}})} = \underbrace{\underline{r}_i \times \underline{F}_i^{(k)}}_{} + \underline{r}_i \times \sum_j \underline{F}_{ij}$$

$$\frac{d\underline{N}_i}{dt} = \underline{M}_i^{(k)} + \sum_j (\underline{r}_i \times \underline{F}_{ij})$$

(forgatónyomatéka a külső erőnek!)

$$\frac{d}{dt}\sum_i \underline{N}_i = \sum_i \underline{M}_i + \underbrace{\sum_{ij} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij}}$$

Newton III. szerint $\boxed{\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji}}$

$$\sum_{ij} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ij} = \underline{M}^*$$

$$-\sum_{ij} \underline{r}_i \times \underline{F}_{ji} = -\sum_{ij} \underline{r}_j \times \underline{F}_{ij} = \underline{M}^*$$

$$\underline{M}^* = \frac{1}{2}\sum_{ij} (\underbrace{\underline{r}_i - \underline{r}_j}) \times \underline{F}_{ij} = 0 (!)$$

Centrális erőkében $(\underline{r}_i - \underline{r}_j) \parallel \underline{F}_{ij}$ -vel tehát keresztszorzatuk $\equiv 0$.

tehát az impulzus momentum megváltozás, megegyezik a külső erők forgatónyomatékával!

$$\boxed{\underline{N} = \sum_i \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i}$$

, most megpróbáljuk felírni az impulzusmomentumot TKP-i rendszerből!

$$\underline{N} = \sum_i \underline{r}_i \times m_i \underline{v}_i \quad ; \text{ahol} \quad \underline{r}_i = \underline{r}_0 + \underline{\varrho}_i \;;\; \underline{v}_i = \underline{v}_0 + \dot{\underline{\varrho}}_i$$

$$\underline{N} = \sum_i (\underline{r}_0 + \underline{\varrho}_i) \times m_i (\underline{v}_0 + \dot{\underline{\varrho}}_i)$$

$$= \sum_i \Big[m_i (\underline{r}_0 \times \underline{v}_0) + m_i (\underline{r}_0 \times \dot{\underline{\varrho}}_i) + m_i (\underline{\varrho}_i \times \underline{v}_0) + m_i (\underline{\varrho}_i \times \dot{\underline{\varrho}}_i) \Big]$$

$$= \underbrace{m_t (\underline{r}_0 \times \underline{v}_0)}_{\underline{N}_{tkp}} + \underline{r}_0 \times \underbrace{\Big(\sum_i m_i \dot{\underline{\varrho}}_i\Big)}_{} + \underbrace{\Big(\sum_i m_i \underline{\varrho}_i\Big)}_{} \times \underline{v}_0 + \underbrace{\sum_i m_i (\underline{\varrho}_i \times \dot{\underline{\varrho}}_i)}_{}$$

TKP-i rendszer TKP-ja a $\vec{0}$! $\Rightarrow \vec{0}$

$\underline{N}_s$: sajátimpulzus-momentum!

$\boxed{\sum_i m_i (\underline{\varrho}_i \times \dot{\underline{\varrho}}_i)}$ → különleges tulajdonsága, hogy nem függ a koordinátarendszer eltolásától és elforgatásától sem, mivel csak a test belső viselkedésére jellemző.

$$\boxed{\underline{N} = \underline{N}_{tkp} + \underline{N}_s}$$

$$\frac{d}{dt} \underline{N}_i = \sum_i \underline{M}_i = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \sum_i (\underline{r}_0 + \underline{\varrho}_i) \times \underline{F}_i$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\Big(m_t (\underline{r}_0 \times \underline{v}_0) + \sum_i m_i (\underline{\varrho}_i \times \dot{\underline{\varrho}}_i) \Big) = \sum_i \underline{r}_0 \times \underline{F}_i + \sum_i \underline{\varrho}_i \times \underline{F}_i$$

$$\underbrace{\cancel{m_t (\underline{r}_0 \times \underline{a}_0)}}_{r_0 \times (m_t \underline{a}_0)} + \sum_i \underline{\varrho}_i \times m_i \ddot{\underline{\varrho}}_i = \underbrace{\cancel{\sum_i \underline{r}_0 \times \underline{F}_i}}_{r_0 \times \sum_i \underline{F}_i = \underline{r}_0 \times (m_t \underline{a}_0)} + \sum_i \underline{\varrho}_i \times \underline{F}_i$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \underline{N}_{saját} = \sum_i \underline{M}_i}$$

Ez akkor is működik, ha a TKP-i rendszer nem inercia-rendszer, mivel a tehetetlenségi erőknek nincs forgatónyomatéka.

Ha újra visszatérünk az eredeti egyenletekhez:

$$\underline{v}_i \cdot / \quad m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i^{(k)} + \sum_j \underline{F}_{ij}$$

$$\underbrace{m_i \underline{v}_i \ddot{\underline{r}}_i} = \underline{v}_i \underline{F}_i^{(k)} + \sum_j \underline{v}_i \underline{F}_{ij} = \boxed{P_i^{(k)}} + \sum_j \underline{v}_i \underline{F}_{ij}$$

(külső erők teljesítménye)

$$\sum_i / \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \underline{v}_i^2\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} E_{kin} = P^{(k)} + \sum_i \sum_j \underline{v}_i \underline{F}_{ij}} \cancel{= P^{(k)} + \sum_i \sum_j \underline{v}_i (-\underline{F}_{ji})}$$

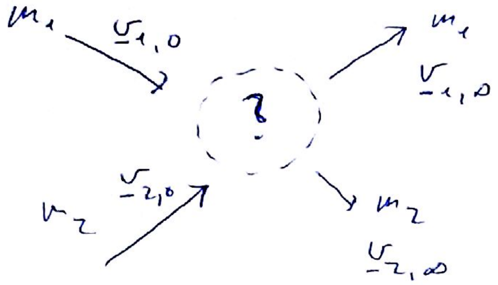
T.f.h.: Ha a belső és külső erők is konzervatívak; akkor:

$$E = E_{kin} + \phi + \underbrace{\sum_{i,j} \frac{1}{2} \phi_{i,j}} = \text{áll.}$$

Ez akkor nulla, ha $\underline{F}_{ij}$ kényszererő!

Merev testeknél az <u>összes</u> belső erőt kényszererőnek tekintjük!

(16) Rugalmas ütközések (, hatáskeresztmetszettel)



Tudjuk, hogy centrális erőtérben egy ilyen rendszer:

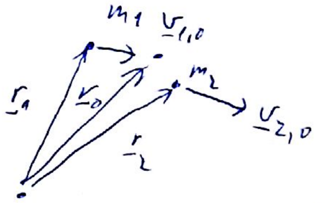
1) $\underline{p} =$ áll.

2) $\underline{v}_{TKP} =$ áll.

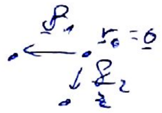
3) rugalmas ütközés esetén teljesül az energiamegmaradás

→ Térjünk át tömegközépponti rendszerbe:

$$\underline{r}_0 = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1+m_2} \rightarrow \underline{v}_0 = \frac{m_1 \underline{v}_{1,0} + m_2 \underline{v}_{2,0}}{m_1+m_2} = \frac{m_1 \underline{v}_{1,t} + m_2 \underline{v}_{2,t}}{m_1+m_2}$$



⇒



$$\rho_1 = \underline{r}_1 - \underline{r}_0$$

$$\rho_2 = \underline{r}_2 - \underline{r}_0$$

(1) (2) $$p_1^{(TKP)} = m_1 \dot{\rho}_1 = m_1 (\underline{v}_{1,t} - \underline{v}_0)$$

$$p_1^{(TKP)} = m_1 \underline{v}_{1,t} - m_1 \frac{m_1 \underline{v}_{1,t} + m_2 \underline{v}_{2,t}}{m_1+m_2} = \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}_{m^*} (\underline{v}_{1,t} - \underline{v}_{2,t})$$

$$p_2^{(TKP)} = m_2 \dot{\rho}_2 = m_2 \underline{v}_{2,t} - m_2 \frac{m_1 \underline{v}_{1,t} + m_2 \underline{v}_{2,t}}{m_1+m_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (\underline{v}_{2,t} - \underline{v}_{1,t}) = -p_{(1)}^{(TKP)}$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_k p_k^{(TKP)} \equiv 0}$$

(3) $$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$\frac{{p_{1,0}^{(TKP)}}^2}{2m_1} + \frac{{p_{2,0}^{(TKP)}}^2}{2m_2} = \frac{{p_{1,\infty}^{(TKP)}}^2}{2m_1} + \frac{{p_{2,\infty}^{(TKP)}}^2}{2m_2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{{p_{1,0}^{(TKP)}}^2 = {p_{1,\infty}^{(TKP)}}^2}$$

(Mivel $p_1^{(TKP)} = -p_2^{(TKP)}$ és $\forall t \in \mathbb{R}$ időpillanatban igaz!)

$p_{1,\infty}^{TKP} = \underline{n}\,|p_{1,0}^{(TKP)}| = m^*|\underline{v}_{1,0}-\underline{v}_{2,0}|\,\underline{n}$ $\cancel{= m_1(\dot{\varrho}_{1,\infty}+\underline{v}_0)}$

Nagysága ismert, viszont iránya nem!

$\cancel{p_{1,\infty}^{(TKP)}}$

⇒ Visszatérve nem TKP-i rendszerbe:

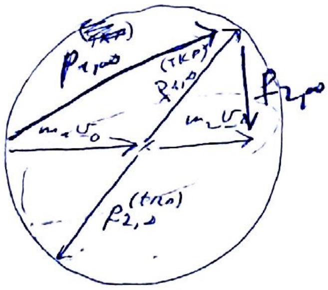
$$p_{1,\infty} = m_1\underline{v}_{1,\infty} = m_1(\dot{\varrho}_{1,\infty}+\underline{v}_0) = p_{1,\infty}^{(TKP)} + m_1\underline{v}_0$$

$$p_{1,\infty} = m^*|\underline{v}_{1,0}-\underline{v}_{2,0}|\,\underline{n} + m_1\underline{v}_0$$

$$\Downarrow$$

$$p_{2,\infty} = -m^*|\underline{v}_{1,0}-\underline{v}_{2,0}|\,\underline{n} + m_2\underline{v}_0$$

$\underline{n}$: gömbi koordinátarendszerben φ és ϑ határozza meg; nagysága viszont adott!

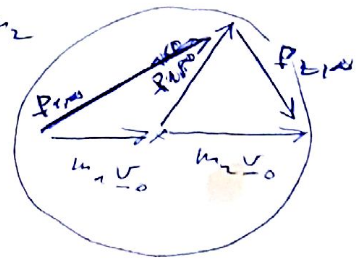


Ha változtatom $\underline{n}$ irányát, akkor $\forall$ esetben meg tudom határozni a végsebességeket!

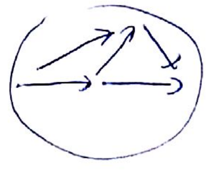
Spec. esetek: ① $\underline{v}_{2,0} = 0$ ⇒ $p_{1,\infty}^{(TKP)} = m^*|\underline{v}_{1,0}|\,\underline{n}$ ← nagyságuk megegyezik!

$\underline{v}_0 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\underline{v}_{1,0}$ ⇒ $m_2\underline{v}_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\underline{v}_{1,0} = m^*\underline{v}_{1,0}$

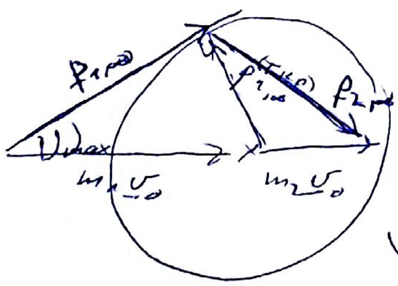
a) $m_1 < m_2$



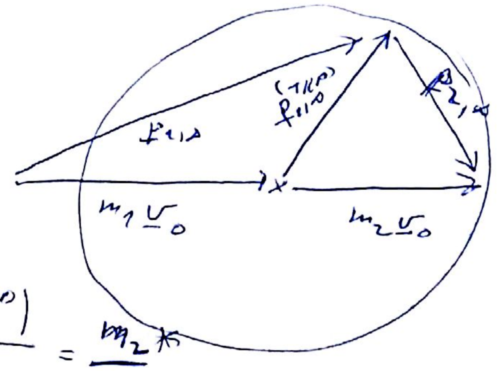
b) $m_1 = m_2$



c) $m_1 > m_2$



Ennek van maximális értéke! ⇐



↳ $\sin\vartheta_{max} = \frac{|p_{1,\infty}^{(TKP)}|}{m_1 v_0} = \frac{m_2}{m_1}$ *

(17) Merev test mozgásának leírása

$$\underline{N} = \underbrace{\underline{r}_0 \times M_t \underline{v}_0}_{\text{pályamomentum}} + \underbrace{\underline{N}_s}_{\text{sajátimpulzusmomentum}}$$

$$E_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \underline{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\underline{v}_0 + \dot{\underline{\varrho}}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \underline{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{\varrho}}_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i 2 \dot{\underline{\varrho}}_i \underline{v}_0$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_t \underline{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{\varrho}}_i^2 + \underbrace{\sum_i (m_i \dot{\underline{\varrho}}_i)}_{\text{TKP-hozzájárulás deriváltja} = 0} \underline{v}_0$$

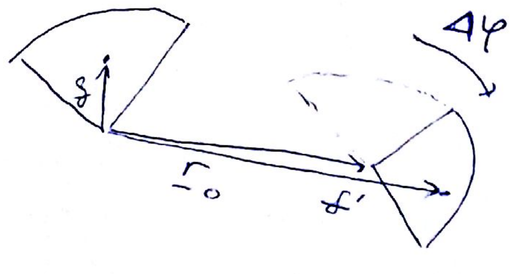
$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_t \underline{v}_0^2 + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{\varrho}}_i^2}$$

→ forgási energiának nevezzük majd

1) $M \dot{\underline{r}}_0 = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i^{(k)}$

II) $\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_i^{(k)}$

Merev testnél:



1) $\boxed{\varrho' - \varrho = \underline{r}_0 + \underline{\underline{\sigma}}\varrho}$

, ha $\underline{r}_0$ egy kicsiny elmozdulás $\underline{v}_0$ sebességgel.

$$\varrho' - \varrho = \underline{v}_0 \Delta t + \Delta\varphi \times \varrho \quad / : \Delta t$$

$$\dot{\varrho} = \underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \varrho$$

Így megkaptuk egy merev test tetszőleges pontjának sebességét.

$$\underline{N}_s = \sum_i \underline{\varrho}_i \times m_i \dot{\underline{\varrho}}_i = \sum_i \underline{\varrho}_i \times m_i (\underline{v}_0 + \underline{\omega} \times \underline{\varrho}_i) = \sum_i \underline{\varrho}_i \times m_i (\underline{\omega} \times \underline{\varrho}_i)$$

TKP-i rendszerből nézve ez $\underline{0}$!

$$\underline{N}_s = \sum_i m_i \left(\underline{\omega}(\underline{\varrho}_i \underline{\varrho}_i) - \underline{\varrho}_i (\underline{\omega}\, \underline{\varrho}_i)\right) = \sum_i m_i \left(\underline{\omega}\, \varrho_i^2 - (\underline{\varrho}_i \circ \underline{\varrho}_i)\underline{\omega}\right)$$

$$\underline{N}_s = \Big[\underbrace{\sum_i m_i \left(\underline{\underline{I}}\, \varrho_i^2 - \underline{\varrho}_i \circ \underline{\varrho}_i\right)}_{\underline{\underline{\tilde{\Theta}}}}\Big] \underline{\omega} = \underline{\underline{\tilde{\Theta}}}\, \underline{\omega}$$

Ha $\underline{\varrho}_i = (x_i ; y_i ; z_i) \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\tilde{\Theta}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_i m_i z_i y_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i z_i y_i & \sum_i m_i (y_i^2 + x_i^2) \end{pmatrix}}$$

Teljesen szimmetrikus mátrix, így biztosan főtengelytranszformálható!

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_t \underline{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{\varrho}}_i^2 = \frac{1}{2} m_t \underline{v}_0^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\underline{\omega} \times \underline{\varrho}_i)(\underline{\omega} \times \underline{\varrho}_i)$$

$$= \frac{1}{2} m_t \underline{v}_0^2 + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i (\underline{a}_i ; \underline{\omega} ; \underline{\varrho}_i)}$$

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i (\underline{\omega} ; \underline{\varrho}_i ; \underline{a}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \underline{\omega} \left(\underline{\varrho}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{\varrho}_i)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\omega} \Big[\sum_i m_i \left(\varrho_i^2 \underline{\underline{I}} - \underline{\varrho}_i \circ \underline{\varrho}_i\right)\Big] \underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega}\, \underline{\underline{\tilde{\Theta}}}\, \underline{\omega}$$

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} m \underline{v}_0^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}\, \underbrace{\underline{\underline{\Theta}}\, \underline{\omega}}_{\underline{N}}}$$

Merev test forgása során; ha az erők konzervatívak; akkor ez használható!

Visszatérve a merev testek mozgását leíró részletes egyenletrendszerhez:

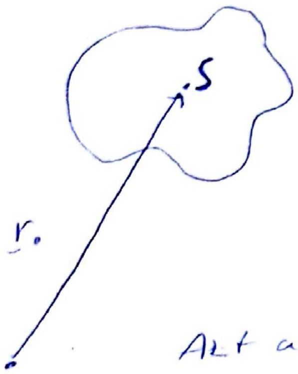
I) $M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_i \underline{F}_i^{(k)} = \underline{F}$ ← az erők eredője, ami adott távolságban véve úgy forgat, mint a helyettesített erők!

II) $\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_{i} \underline{M}_i^{(k)} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \underline{r} \times \underline{F}$

Ha

Merőlegesnek kell lennie a forgatónyomatékok összegére!

pl.:



m_i ; $g(\underline{r}_i)$

, ha g=áll.

$$\underline{G} = \sum_i m_i g(\underline{r}_i) = m_t g$$

, ha g=áll.

$$\underline{M} = \sum_i \underline{r}_i \times m_i g(\underline{r}_i) = \left(\sum_i m_i \underline{r}_i\right) \times g = \boxed{m_t \underline{r}_0 \times g}$$

Azt a pontot, ahová $\underline{r}_0$ mutat súlypontnak nevezzük; és homogén gravitációs mezőben egybeesik a TKP-val!

Ha síkban történő merev test mozgását akarom leírni; akkor:

$$M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_i \underline{F}_i$$

$$\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_i \underline{M}_i$$

} 6 egyenlet, de mivel tudom, hogy az összes erő z irányú komponensei nem okoznak gyorsítást (kényszererő) és nincs forgatónyomatékuk; ezért:

$M\ddot{\underline{x}}_0 = \sum_i \underline{F}_{i,x}$; $M\ddot{y}_0 = \sum_i \underline{F}_{i,y}$ és, mivel síkban (x,y) mozog, ezért csak z-irányú forgatónyomatéka a predikálható lehet!

$$\boxed{\frac{d\underline{N}_s(z)}{dt} = \sum_i \underline{M}_i(z)}$$

itt Θ már diagonalizált!

$$\underline{N}_{(s)}(z) = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} = \underline{\underline{\Theta}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \omega_z \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \Theta a' \\ \Theta b' \\ \boxed{\Theta_{33}\,\omega_z} \end{pmatrix}$$

} ezeknek tart ellen a kényszererő!

így $\underline{N}_s(\cancel{z}) = \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ \Theta_{33}\omega_z \end{pmatrix}$

$$\sum_i m_i \left(\underline{\varrho}_i^2 \underline{\underline{I}} - \underline{\varrho}_i \circ \underline{\varrho}_i \right) \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & a & b \\ -a & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & b \\ -b & -c & \sum_i m_i (y_i^2 + x_i^2) \end{pmatrix}$$

jha már diagonalizált

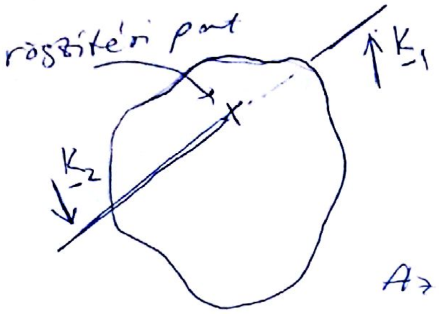
$$N_s(z) = \Theta_{33}\,\omega_z = \sum_i m_i \underbrace{\left(y_i^2 + x_i^2 \right)}_{}\omega_z$$

áll. ; mivel ez egy merev test!

$$\frac{dN_s(z)}{dt} = \sum_i M_i(z) = \Theta_{33}\frac{d\omega_z}{dt} = \Theta_{33}\,\beta$$

, röviden tehát: $\boxed{M = \Theta\beta}$

(18) Rögzített tengely körüli forgás (merev test síkmozgása)



A tengely mentén erőt kell kifejteni, hogy az ne forduljon el. Ezeket a kényszerfeltételeket nem tudjuk kiküszöbölni.

Azonban; ha feltesszük, hogy a tengely rögzített, nem fordul el; akkor a forgatónyomatéknak és a perdületnek csak tengely irányú komponense van!

$$\Rightarrow \quad \frac{dN_{(3)}}{dt} = \sum_i M_{i(3)} \qquad \underline{N}_s = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} \qquad \underline{v} = \cancel{\underline{v}_0}^{=0} + \underline{\omega}\times(\underline{r}-\underline{r}_0)$$

rögzített pont sebessége

$$\underline{N} = \sum_i \underline{r}_i \times m_i(\underline{\omega}\times\underline{r}_i) = \underline{\underline{\Theta}}^*\underline{\omega}$$

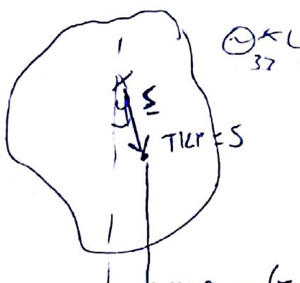
rögzített ponthoz képesti sebesség!

Ez a rögzítési pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték!

$$\frac{dN_3}{dt} = \sum_i M_{i(3)} \rightarrow N_3 = \Theta^*_{33}\,\omega$$

nem függ az időtől; mivel a test megint merev; a felfüggesztéstől adott pont ugyanazon távol van!

$$\cancel{\Theta_{33}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_3(\varphi)}$$



$$\cancel{\Theta^*_{33}\dot\varphi(\varphi)}\ \Theta^*_{33}\,\omega(\varphi) = N_3(\varphi)$$

$$\Theta^*_{33}\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} = M_3(\varphi) = -\underbrace{sG\sin\varphi}_{|\underline{s}\times\underline{G}|}$$

$$\Theta^*_{33}\ddot\varphi = -sG\sin\varphi$$; ha φ kicsiny (!)

$$\Theta^*_{33}\ddot\varphi + sG\varphi = 0$$

$$\varphi = \cos\left(\sqrt{\frac{sG}{\Theta^*_{33}}}\,t + \varphi_0\right) \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{sG}{\Theta^*_{33}}}$$

Ebből meg tudjuk mondani a periódusidejét is!

Ha azt akarjuk tudni, hogy tetszőleges P pontja, hogyan mozog; akkor:

$$\underline{r}(P) = \underline{s} + \underline{\delta}$$

$$\Theta^*_{33} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i \left[(s_x + \delta_{x,i})^2 + (s_y + \delta_{y,i})^2 \right] m_i$$

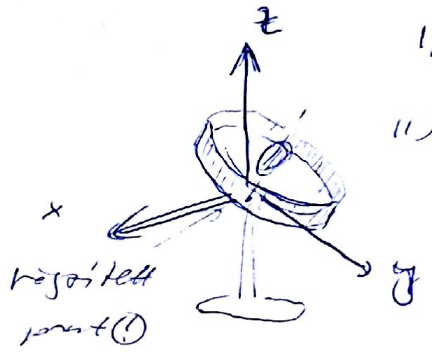
$$= \underbrace{\sum_i m_i (s_x^2 + s_y^2)}_{Ms^2} + \underbrace{\sum_i m_i (\delta_{x,i}^2 + \delta_{y,i}^2)}_{\Theta_{33}\ (!)} + \underbrace{\sum_i m_i (2 s_x \delta_{x,i} + 2 s_y \delta_{y,i})}_{2 s_x \left(\sum_i m_i \delta_{x,i}\right) + 2 s_y \left(\sum_i m_i \delta_{y,i}\right)}$$

$$2 s_x \underbrace{\left(\sum_i m_i \delta_{x,i}\right)}_{0} + 2 s_y \underbrace{\left(\sum_i m_i \delta_{y,i}\right)}_{0}$$

$$\boxed{\Theta^*_{33} = \Theta_{33} + Ms^2}$$ Steiner-tétel (!)

(!) mert $\boxed{\sum_i m_i \delta_i = \underline{0}}$

(19) Rögzített pont körüli forgás



1) $M\ddot{\underline{r}}_0 = \sum_i \underline{F}_i^{(k)}$

2) $\frac{d\underline{N}}{dt} = \sum_i \underline{M}_i^{(k)}$ ← csak a külső erők forgató-nyomatékára kell figyelemmel lennünk, ha a koordinátarendszerünk kp.-ját a rögzített pontba helyezzük!

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{\omega}\times\underline{r} = 0 + \underline{\omega}\times\underline{r}$$

↑ Rögzített ponti rendszerben annak sebessége 0!

$$\underline{N} = \sum_i m_i \underline{r}_i \times(\underline{\omega}\times\underline{r}_i) = \underline{\underline{\Theta}}^{**}\underline{\omega}$$

↑ Ez egy új tehetetlenségi nyomaték; mivel ez függ(!!!) az időtől.

$\frac{d}{dt}(\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}) = \sum_i \underline{M}_i$ → most az kell kitalálni, hogy ezt, hogy kapjuk meg!

A koordinátarendszer, amiben vagyunk folyamatosan változik!

$$\underline{\underline{\Theta}}(t) = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{\Theta}}_0\,\underline{\underline{\tilde{R}}}$$

Felhasználjuk azt, hogy forgó koordinátarendszerben:

$$\underline{v}' = \underline{v}_0 + \underline{\omega}\times\underline{r}$$

$\frac{d'\underline{N}'}{dt} = \frac{d}{dt}\underline{N} + \underline{\omega}\times\underline{N} = \underline{M}$ ← Itt a testtel együtt forgó koordinátarendszerből írom fel az impulzusmomentumot!

$$\underline{N}^{*} = \underline{\underline{\Theta}}_0\, \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & \\ & \Theta_2 & \\ & & \Theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

I) $\dfrac{dN_1}{dt} + \omega_2 N_3 - \omega_3 N_2 = M_1$ $\qquad N_1 = \Theta_1 \omega_1$

II) $\dfrac{dN_2}{dt} + \omega_3 N_1 - \omega_1 N_3 = M_2$ $\qquad N_2 = \Theta_2 \omega_2$

III) $\dfrac{dN_3}{dt} + \omega_1 N_2 - \omega_2 N_1 = M_3$ $\qquad N_3 = \Theta_3 \omega_3$

$\Rightarrow$ I) $\Theta_1 \dfrac{d}{dt}\omega_1 + \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_2) = M_1$

II) $\Theta_2 \dfrac{d}{dt}\omega_2 + \omega_1\omega_3(\Theta_1 - \Theta_3) = M_2$

III) $\Theta_3 \dfrac{d}{dt}\omega_3 + \omega_2\omega_1(\Theta_2 - \Theta_1) = M_3$

Euler-féle pörgettyűegyenletek

Ha a pörgettyű szimmetrikus, akkor $\Theta_1 = \Theta_2$, mivel van egy saját szim. tengelye. Ha a pörgettyű erőmentes; akkor nincsenek forgatónyomatékok!

I) $\Theta_1 \dfrac{d}{dt}\omega_1 + \omega_2\omega_3(\Theta_3 - \Theta_1) = 0 \quad | \cdot \omega_1$

II) $\Theta_1 \dfrac{d}{dt}\omega_2 + \omega_1\omega_3(\Theta_1 - \Theta_3) = 0 \quad | \cdot \omega_2$

III) $\Theta_3 \dfrac{d}{dt}\omega_3 + \omega_2\omega_1(\Theta_1 - \Theta_1) = 0 \Rightarrow \Theta_3 \beta_3 = 0$

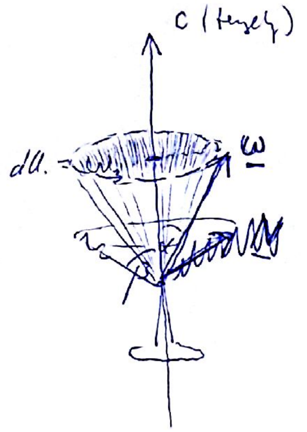
$\Rightarrow \boxed{\omega_3 = \text{áll.}}$

I) + II) $\Theta_1 \underbrace{(\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2)}_{\dot\omega_1\omega_1 + \dot\omega_2\omega_2} = 0$

$\dfrac{1}{2}\Theta_1 \dfrac{d}{dt}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \Rightarrow \boxed{\omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{áll.}}$

$\Rightarrow$ Lényegében $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = |\underline{\omega}| = \text{áll.}$ (!)

Egy α szögű kúp mentén forog körbe $\underline{\omega}$ vektor egy c tengely körül, amit ω_3 komponens jelöl ki!

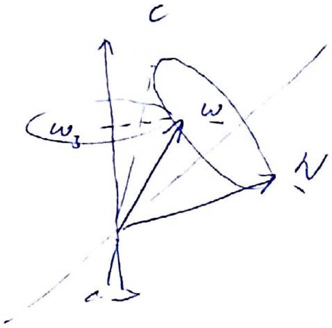


$\rightarrow$ Mivel $\sum_i \underline{M}_i = 0 = \frac{d\underline{N}}{dt} \Rightarrow \boxed{\underline{N} = \text{áll.}}$

Ez azt jelenti, hogy $\underline{N}$ is egy kúpon megy körbe!

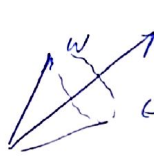
Ezáltal a mozgási energia is állandó; hiszen

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} = \frac{1}{2}\underline{\omega}\,\underline{N} = \boxed{\frac{1}{2}\underline{N}\,\underline{\omega}}$$



Ahogy $\underline{N}$ és $\underline{\omega}$ vektorok körbe járják a „kúpjaikat", úgy egymást is!

Ezt nutációnak nevezzük, és is meghatároz $\underline{N}$ körül egy kúpot!



nutációs kúp (!)

Ha az ~~külső~~ erők forgatónyomatéka nem nulla, akkor súlyos pörgettyűről beszélünk.

$\frac{d\underline{N}}{dt} = \underline{M}$ $\quad \underline{N}\,\underline{M} = \underline{N}\frac{d}{dt}\underline{N} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\underline{N})^2$; ha ez is szimmetrikus, akkor van egy forgási szimmetriatengely, ami körül pörgetve $\underline{N}$ ezzel párhuzamos lesz!

(Ekkor, ha nincs (?) külső forgatónyomaték, akkor $|\underline{N}|^2 = \text{áll.}$)

Stabilitásvizsgálat

i) $\Theta_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3\left(\Theta_3-\Theta_2\right)=0$

ii) $\Theta_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_3\left(\Theta_1-\Theta_3\right)=0$

iii) $\Theta_3 \frac{d\omega_3}{dt} + \omega_2\omega_1\left(\Theta_2-\Theta_1\right)=0$

$\underline{\omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{\omega} \end{pmatrix}$ megoldása az egyenletrendszernek!

Mi van akkor, ha

$\boxed{\underline{\omega}_0 + \delta\underline{\omega} = \underline{\omega}}$ Perturbáció!

$$\Rightarrow \Theta_1 (\dot{\delta\omega_1}) + \delta\omega_2\omega_0 (\Theta_3-\Theta_2) = 0$$

$$\Theta_2 (\dot{\delta\omega_2}) + \delta\omega_1\omega_0 (\Theta_1-\Theta_3) = 0$$

$$\underbrace{\Theta_3 (\dot{\delta\omega_3})}_{\equiv 0} + \underbrace{\delta\omega_2\delta\omega_1 (\Theta_2-\Theta_1)}_{\text{azt elhanyagoljuk!}} = 0 \rightarrow$$

ω_0 önkényesen megválasztott volt; bármilyen nagyságú lehet!

T.f.h. a diffegyenlet megoldása $\begin{pmatrix} \delta\omega_1 \\ \delta\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\omega_{1,0} \\ \delta\omega_{2,0} \end{pmatrix} e^{\lambda t}$

I) $\Theta_1 \lambda \delta\omega_{1,0} e^{\lambda t} + \delta\omega_{2,0} e^{\lambda t} \omega_0 (\Theta_3-\Theta_2) = 0$

II) $\Theta_2 \lambda \delta\omega_{2,0} e^{\lambda t} + \delta\omega_{1,0} e^{\lambda t} \omega_0 (\Theta_1-\Theta_3) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \Theta_1\lambda & \omega_0(\Theta_3-\Theta_2) \\ \omega_0(\Theta_1-\Theta_3) & \Theta_2\lambda \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} \delta\omega_{1,0} \\ \delta\omega_{2,0} \end{pmatrix} = 0$$

$\det \underline{\underline{A}} = 0$; ahhoz, hogy legyen nem triviális mo.!

$$\lambda^2 = \omega_0^2 \frac{(\Theta_1-\Theta_3)(\Theta_3-\Theta_2)}{\Theta_1\Theta_2} \rightarrow \Theta_1-\Theta_3>0 \quad \Theta_3-\Theta_2>0$$

vagy

$\Theta_1-\Theta_3<0 \quad \Theta_3-\Theta_2<0$

instabil

Stabil

$\Theta_3 > \Theta_2$	$\Theta_3 < \Theta_2$	$\Theta_3 > \Theta_2$	$\Theta_3 < \Theta_2$
$\Theta_3 > \Theta_1$	$\Theta_3 < \Theta_1$	$\Theta_3 < \Theta_1$	$\Theta_3 > \Theta_1$
↓ legnagyobb tengely (valóságban nem igaz ez!)	↓ legkisebb tengely	↓ középső tengely körüli forgás	