Vektorszámítás kollokvium
2013 szeptember-december – 2014 január-február
szóbeli tételek

VEKTORALGEBRA (+ füzet!) (+ gyöngy)

1. Műveletek vektorokkal. Definíciók. Műveleti szabályok. Geometriai alkalmazások.
2. A lineáris tér fogalma. Lineáris függetlenség, dimenzió, bázis. Példák.
3. Vektorok és vektorműveletek reprezentációja ortonormált bázison.
4. A Kronecker- és a Levi–Civita-szimbólumok értelmezése és használata.
5. Lineáris transzformációk. Példák. A sík és a tér geometriai transzformációi mint lineáris transzformációk.
6. több! → Lineáris transzformációk reprezentációja ortonormált bázison.
7. Lineáris transzformációkra értelmezett műveletek és reprezentációjuk. Műveleti szabályok.
8. Mátrixok és mátrixműveletek. Speciális alakú mátrixok.
9. több!* Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk. Homogén és inhomogén eset. A megoldások száma. Az eredmény geometriai interpretációja.
10. Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-eliminációval. A megoldás lépései és lehetséges kimenetele.
11. Négyzetes mátrix invertálása Gauss-eliminációval.
12. Bázistranszformáció. A vektorkomponensek transzformációja ortogonális bázistranszformáció esetén.
13. Az operátorok mátrixának transzformációja ortogonális bázistranszformáció esetén. Tenzorok.
14. Lineáris transzformációk sajátértékproblémája. Definíció, tételek. Alkalmazások.
15. Lineáris transzformációk sajátértékeinek és sajátvektorainak kiszámítása.
16. Kétoldali sajátértékprobléma. Reciprok vektorrendszerek. Mátrixok projektorfelbontása.
17. Mátrixfüggvények értelmezése és kiszámítása.
18. 1X → Szimmetrikus operátor mátrixának főtengelytranszformációja.
19. Kúpszeletek. Egyenletük. A kanonikus alakra hozás módszere. Típusok.
20. Másodrendű felületek. Egyenletük. A kanonikus alakra hozás módszere. Típusok.

VEKTORANALÍZIS (+ füzet: IIII)

21. Térgörbék. Paraméterezés. Ívhossz definíciója és kiszámítása.

22. Térgörbék görbülete és torziója. Alaptétel.

23. Többváltozós függvények. Parciális deriválás. Young-tétel.

24. Skalármezők. Potenciálfelületek. Deriválás. A gradiens definíciója.

25. Iránymenti derivált. Vektormező menti derivált. Értelmezése, fizikai alkalmazása.

26. Vektormezők. Szemléltetés. Iránymező. Erővonalak. Differenciálás.

27. Vonalintegrál. Definíciója, kiszámítási módszere. Körintegrál. Gradiens körintegrálja.

28. Gradienstétel. Rotáció. A rotáció szemléletes jelentése.

29. Vektormezők divergenciája. Szemléletes jelentése. Kiszámítása.

30. A gradiens, rotáció és divergencia kiszámítása vektormezők reprezentációja alapján.

31. A nabla operátor. Értelmezése, használata. Példák.

32. Indexes írásmód, Einstein-féle néma index konvenció. Az indexes deriválás módszere.

33. Magasabb vektorderiváltak és kapcsolatuk: rot grad, div rot, grad div, rot rot és a Laplace-operátor.

34. A felületi integrál értelmezése, fizikai jelentése. Kiszámításának módszere.

35. Görbe felületek felszíne, testek térfogata. Értelmezés, kiszámítás.

36. Különféle integrálok definíciója. Paraméterezés és kiszámítási eljárás.

37. A Gauss-tétel és fizikai alkalmazásai.

38. A Stokes-tétel és fizikai alkalmazásai.

Mindenki (aki sikeresen teljesítette a beugró zh kritériumait) két tételt kap, egyet vektoralgebrából, egyet vektoranalízisből.

Sikeres vizsgázást kívánok!
dgy

① Műveletek vektorokkal

(definíciók, műveleti szabályok, geometriai alkalmazások)

Vektor: egy absztrakt vektorhalmaz (V) egy eleme, amire igazak a következő állítások:

$(V;+)$ ① műveletileg zárt

$$\forall \vec{a},\vec{b} \in V: \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}, \quad \exists \vec{c}\in V$$

② asszociatív

$$\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V: (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

③ létezik egységelem:

$$\exists \vec{0} \in V: \forall \vec{a}\in V: \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

④ inverzelem is létezik

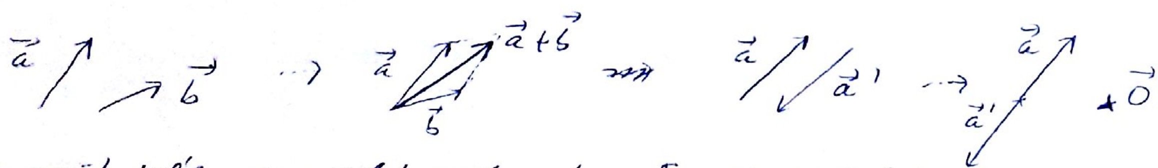
$$\forall \vec{a}\in V\ \exists \vec{a}' \in V: \vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$$

(+1) kommutatív

$$\forall \vec{a},\vec{b}\in V: \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

⇒ a vektorok az összeadásra nézve Abel-csoportot (kommutatív csoportot alkotnak)

→ Geometriailag ezt jól lehet szemléltetni:



Értelmezzük még a vektorok és S skalárok közti műveleteket is.

$S\times V \to V$: ez ugyanis egy $(\alpha,\vec{a})$ számpárhoz rendel egy $\vec{b}$ vektort! $\alpha\vec{a}=\vec{b}$ módon.

I) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=(\alpha\vec{a})+(\alpha\vec{b})$ $\quad\forall\alpha\in S$ és $\forall \vec{a},\vec{b}\in V$

II) $(\alpha+\beta)\vec{a}=(\alpha\vec{a})+(\beta\vec{b})$

III) $\forall \vec{a} \in V \quad \exists 1 \in S \; : \vec{a}\,1 = \vec{a}$

S egy struktúra, mivel vannak benne értelmezett műveletek, legyen S skalár test, legyenek igazak rá a testaxiómák

$(S; +, \cdot)$ ① zárt ④ multiplikatív és additív egységelem
② kommutatív ⑤ inverzek (⊙ esetén $\forall$ kivéve a 0)
③ asszociatív ⑥ disztributivitás (a szorzás az összeadásra nézve)

A skaláris szorzást a következőképpen értelmezhetjük. Ez egy olyan függvény, amely $V \times V \to \mathbb{R}$ rendel jasas $(\vec{a}, \vec{b}) \to \alpha$ a következő szabályok szerint:

$\alpha \in \mathbb{R}$

I) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$ kommutatív

II) $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b} = \vec{c}(\vec{a} + \vec{b})$

III) $(\alpha \vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$

IV) $\vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0 \Rightarrow |\vec{a}|^2 = 0$, ha $\vec{a} = \vec{0}$

Vektorok hosszának értelmezéséig absztrakt módon nem lehet eljutni, ezért ez egy teljesen új fogalom

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$ (vektor hossza)

V) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$

Viszont általánosságban a skaláris szorzást a következő képlettel adjuk meg:

1) Választunk egy bázist, melynek bázisvektorai $\left\{ \vec{b}^{(k)} \right\}_{k=1}^{n}$; $\dim V = n$.

2) $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok felírhatóak $\vec{b}^{(k)}$ vektorok lineárkombinációjaként

$$\vec{u} = \sum_k u_k \vec{b}^{(k)} \qquad \vec{v} = \sum_\ell v_\ell \vec{b}^{(\ell)}$$

Ekkor tehát $\underline{\vec{u}}\,\underline{\vec{v}}$ skalárszorzat:

$$\underline{\vec{u}}\,\underline{\vec{v}} = \sum_k \sum_l u_k \vec{b}^{(k)} v_l \vec{b}^{(l)} = \sum_k \sum_l u_k v_l \underbrace{\left(\vec{b}^{(k)} \vec{b}^{(l)}\right)}$$

Ez valamilyen két indexes mennyiség, amely szimmetrikus: $g_{kl} = g_{lk}$, mivel a skaláris szorzás kommutatív.

Ez a g_{kl} szimmetrikus mennyiség teszi lehetővé, hogy többféleképpen is értelmezzük a skaláris szorzást akár egy adott lineáris téren is!

Legfontosabb tulajdonsága: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ (!)

*Megjegyzés:

Ha $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor a következőket mondhatjuk el a skaláris szorzásról

i) $\underline{\vec{a}}\,\underline{\vec{b}} = (\underline{\vec{b}}\,\underline{\vec{a}})^*$ $\quad \langle \vec{a}|\vec{b}\rangle = \langle \vec{b}|\vec{a}\rangle^*$

ii) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ $\quad \langle \vec{a}|(\vec{b}+\vec{c})\rangle = \langle \vec{a}|\vec{b}\rangle + \langle \vec{a}|\vec{c}\rangle$

viszont! $\left(\langle (\vec{a}+\vec{b})|\vec{c}\rangle = \langle \vec{c}|\vec{a}\rangle^* + \langle \vec{c}|\vec{b}\rangle^* \right)$

iii) $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha^*(\vec{a}\vec{b})$ $\quad \langle \alpha\vec{a}|\vec{b}\rangle = \alpha^*\langle \vec{a}|\vec{b}\rangle$

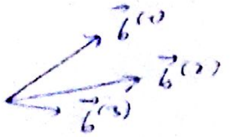
iv) $\vec{a}(\beta\vec{b}) = \beta(\vec{a}\vec{b})$ $\quad \langle \vec{a}|\beta\vec{b}\rangle = \beta\langle \vec{a}|\vec{b}\rangle$

→ g_{kl} úgy válasszuk, hogy $k=l$ értéke $=1$, $k \neq l$ értéke $=0$ és ezt nevezzük Kronecker-deltának: δ_{kl}

Így ortonormált bázison $\vec{b}^{(k)}\vec{b}^{(l)} = 0$ $(\vec{a} \neq \vec{b} \neq \vec{0})$, ha $\vec{a} \perp \vec{b}$ és normált, ha $\vec{b}^{(l)}\vec{b}^{(l)} = 1$, azaz ortonormált egy bázis, ha a bázisvektorok skalárszorzata $\delta_{kl} = \vec{b}^{(k)}\vec{b}^{(l)}$, így az $\underline{\vec{u}}\,\underline{\vec{v}}$ skalárszorzat: $\sum_k v_k u_k$ képletre egyszerűsödik!

(Természetesen teljesülnie kell, hogy $|\vec{b}^{(n)}| = 1$!)

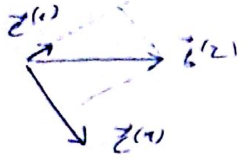
(Megj: Gram - Schmidt ortogonalizáció:



$\to \vec b^{(i)}$ vektorok bázist alkotnak, de nem ortonormáltak!

1) 

$\vec e^{(1)} = \frac{\vec b^{(1)}}{|\vec b^{(1)}|}$, így $|\vec e^{(1)}| = 1$

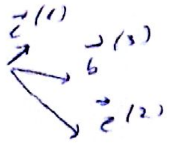
2) 

$\vec b^{(2)} = \alpha \vec e^{(1)} + \vec c^{(1)}$ $\quad \vec c^{(1)} \perp \vec e^{(1)}$

$\vec b^{(2)} \vec e^{(1)} = \alpha \underbrace{\vec e^{(1)} \vec e^{(1)}}_{=1} + \underbrace{\vec c^{(1)} \vec e^{(1)}}_{=0}$

$\vec e^{(1)} \vec b^{(2)} = \alpha$

$\underline{\vec c^{(1)} = \vec b^{(2)} - (\vec e^{(1)} \vec b^{(2)}) \vec e^{(1)}}$ $\to \vec e^{(2)} = \frac{\vec c^{(1)}}{|\vec c^{(1)}|}$; $|\vec e^{(2)}| = 1$

3) 

...)

Érdemes bevezetni a diadikus szorzás fogalmát ($\circ: V \times V \to L_V$)

$\vec u = \vec a (\vec b \vec v) \to \vec u = \hat{C} \vec v$; ahol $\hat{C} = \vec a \circ \vec b$

↑ Először a $\vec b$, majd $\vec a$ vektor hat $\vec v$-re.

$(\vec a \circ \vec b) \vec v \equiv \vec a (\vec b \vec v)$

Szabályai: I) $(\vec a + \vec b) \circ \vec c = \vec a \circ \vec c + \vec b \circ \vec c$

II) $\vec a \circ (\vec b + \vec c) = \vec a \circ \vec b + \vec a \circ \vec c$

III) $(\alpha \vec a) \circ \vec b = \alpha (\vec a \circ \vec b)$

IV) $(\vec a \circ \vec b)(\vec c \circ \vec d) = \vec b \vec c (\vec a \circ \vec d)$

Biz.: $\vec a \circ \vec b = \hat U$

$\hat U (\vec c \circ \vec d) \vec v = \hat U (\vec c (\vec d \vec v)) =$

$= (\vec a \circ \vec b) [\vec c (\vec d \vec v)] = \vec a ((\vec d \vec v)(\vec b \vec c)) = (\vec b \vec c) \vec a (\vec d \vec v) =$

$= \boxed{(\vec b \vec c)(\vec a \circ \vec d)} \vec v$

$\Leftrightarrow (\vec a \circ \vec b)(\vec c \circ \vec d)$

Vektoriális szorzás egy olyan $V_3 \times V_3 \to V_3$ rendelő függvény, amely:

$$\vec a, \vec b \longmapsto \vec c = \vec a \times \vec b$$, úgy hogy $|\vec c| = |\vec a||\vec b| \sin\alpha$

és $\vec c \perp \vec a, \vec b$, valamint elfogadjuk, hogy a három vektor jobbsodrású rendszert alkot.

[A vektoriális szorzás <u>CSAK</u> 3 dimenzióban érvényes.]

Tulajdonságai: I) $\vec a \times \vec b = -(\vec b \times \vec a)$: antikommutatív

$\forall \vec a, \vec b \in V_3$

II) $\vec a \times \vec a = \vec 0$

$$(\vec a \times \vec b = \vec 0 \text{, ha } \vec b = \lambda \vec a)$$

III) $(\vec a \times \vec b) \times \vec c = \vec b(\vec a \vec c) - \vec a(\vec b \vec c)$

<u>Biz.</u>: $\vec a \times \vec b = \vec u$

$$\left.\begin{aligned}(\vec u \times \vec c)_m &= \sum_k \sum_l \varepsilon_{klm} u_k c_l \\ (\vec u)_k &= \sum_p \sum_q \varepsilon_{pqk} a_p b_q\end{aligned}\right\}$$ ortonormált bázison

$$(\vec u \times \vec c)_m = \sum_k \sum_l \varepsilon_{klm} \left(\sum_p \sum_q \varepsilon_{pqk} a_p b_q \right) c_l$$

$$= \sum_p \sum_k \sum_q \sum_l \varepsilon_{klm} \varepsilon_{pqk} a_p b_q c_l = \sum_l \sum_p \sum_q \left(\sum_k \varepsilon_{lmk} \varepsilon_{kpq} \right) a_p b_q c_l$$

$$= \sum_l \sum_p \sum_q \left(\delta_{lp} \delta_{mq} - \delta_{lq} \delta_{mp} \right) a_p b_q c_l =$$

$$= \sum_l \left(\overbrace{\sum_p \delta_{lp} a_p}^{a_l} \overbrace{\sum_q \delta_{mq} b_q}^{b_m} - \overbrace{\sum_p \delta_{lq} b_q}^{b_l} \overbrace{\sum_p \delta_{mp} a_p}^{a_m} \right) c_l =$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec u \times \vec c = (\vec a \times \vec b) \times \vec c = \vec b(\vec a \vec c) - \vec a(\vec b \vec c)}$$

Vektorok vegyesszorzatának nevezzük az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ~~mátrixoktól~~ vektorokból a következőképpen képzett mennyiséget:

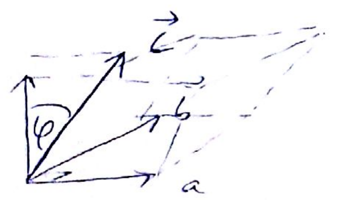
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$$

Ez a mennyiség ciklikusan permutálható, azaz a következő sorrendben $\vec{c} \curvearrowright \vec{a} \curvearrowright \vec{b} \curvearrowright \vec{c}$ vektorok továbbvihetők.

Vagyis: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} =$

$$-(\vec{c} \times \vec{b})\vec{a} = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} \to |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\varphi$$



A vegyesszorzat számértéke megadja a három vektor által „kifeszített" paralelepipedon térfogatát.

Ha $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vegyesszorzat értéke $= 0$, akkor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok lineárisan összefüggők, azaz egy síkba esnek!

<u>Algebra:</u> $(V_3; +, \cdot, \times)$ A háromdimenziós lineáris tér ~~ellátva~~ az összeadás, skalárral való szorzás és vektoriális szorzás műveletekkel ellátva vektoralgebrát alkot, mivel a keresztszorzás ~~...~~ olyan fv., amely értelmezi a $V_3 \times V_3 \to V_3$ rendelő „szorzás" műveletet és kompatibilis az előbbi kettővel.

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \times \vec{c} = \cancel{(\beta\vec{b})(\alpha\vec{a}\vec{c}) - (\alpha\vec{a})(\beta\vec{b}\vec{c})} (\alpha\vec{a} \times \vec{c}) + (\beta\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{c}) + \beta(\vec{b} \times \vec{c})$$

Lie-algebra (nem asszociatív!)

(A keresztszorzás disztributív a összegre nézve)

② A lineáris tér fogalma.

(lineáris függetlenség, dimenzió, bázis, példák)

Ha $\exists$ egy $\mathcal{V}$ (absztrakt vektorhalmaz) és egy $\mathcal{S}$ skalártest, valamint a következő szabályok érvényesek:

I) $\mathcal{S}$ testet alkot: $(\mathcal{S}; +, \cdot)$

① zárt ② asszociatív ③ multiplikatív ill. additív ~~[illegible]~~ zérus elem

④ inverz (+ és $\cdot$ -műveletekre egyaránt) ⑤ kommutatív

⑥ disztributív (a szorzás az összeadásra nézve)

[Egy gyűrű ettől abban tér el, hogy összeadásra Abel-csoportot alkot, viszont szorzásra csak 1-ségelemes félcsoportot. A disztributivitás azonban igaz!]

II) $(\mathcal{V}, +)$ Abel-csoportot alkot

III) $\mathcal{S} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$

(skalárral való szorzás)

$(\alpha, \vec{a}) \to \vec{b}$

① $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = (\alpha\vec{a}) + (\alpha\vec{b})$

② $(\alpha+\beta)\vec{a} = (\alpha\vec{a}) + (\beta\vec{b})$

③ $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

④ $1\vec{a} = \vec{a}$

, akkor ezt az objektumot vektortérnek v. lineáris térnek nevezzük. Jelölése: $\mathcal{W}$

$\vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)}, \dots, \vec{a}^{(n)} \in \mathcal{V}$ vektorok lineárkombinációján azt értjük, hogy $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{S}$ ($\doteq \mathbb{R}$) képzünk összeget:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{a}^{(k)} = \alpha_1\vec{a}^{(1)} + \alpha_2\vec{a}^{(2)} + \dots + \alpha_n\vec{a}^{(n)} = \vec{e} \in \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$ is egy vektortér, amely részhalmaza $\mathcal{W}$ lineáris térnek.

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$$

$\forall \alpha_k \in \mathbb{R}$-re teljesülnek a testaxiómák (, mivel $\mathbb{R}$ testet alkot) és

~~az $\mathbb{T} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ művelet is teljesül~~, de meg kell vizsgálni, hogy zárt-e

ez az $\mathbb{U}$ vektortér.

$$\text{I)}\quad \vec{v} + \vec{u} = \sum_k \alpha_k \vec{a}^{(k)} + \sum_k \beta_k \vec{a}^{(k)} \underset{\uparrow}{=} \sum_k (\underbrace{\alpha_k + \beta_k}_{\delta_k}) \vec{a}^{(k)} \Rightarrow \in \mathbb{U}$$

felhasználtuk, hogy $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}$ $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}$:
$(\alpha + \beta)\vec{a} = (\alpha \vec{a}) + (\beta \vec{a})$

$$\text{II)}\quad \beta \vec{v} = \beta\Big(\sum_k \alpha_k \vec{a}^{(k)}\Big) = \sum_k \beta(\alpha_k \vec{a}^{(k)}) \underset{\uparrow}{=} \sum_k (\overbrace{\beta \alpha_k}^{\xi_k}) \vec{a}^{(k)} \Rightarrow \in \mathbb{U}$$

felhasználva, hogy $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{T}$ $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}$:
$\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha \beta)\vec{a}$

Így $\mathbb{U}$ lineáris teret alkot és altere $\mathbb{V}$ vektortérnek.

$$\mathbb{U} < \mathbb{V}$$

úgy is mondhatjuk, hogy:

$$\mathbb{U} = \mathrm{Span}\left(\vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)}, \dots, \vec{a}^{(n)}\right)$$

$\to$ az $\vec{a}$ vektorok által kifeszített altér egy $\mathbb{U}$ vektortér

pl.: Síkban egy vektor kifeszíti a ~~sík~~ egyik ~~egyenesét~~ alterét; egy egyenest

$\mathrm{Span}(\vec{b}) = \mathbb{H}$

$\mathbb{H} < \mathbb{V}$

A lineáris függetlenség elve úgy szól, hogy:

$$\boxed{\sum_k \alpha_k \vec{e}^{(k)} = \vec{0}}$$

; és akkor nevezzük $\vec{e}$ vektorokat lineárisan függetlennek, ha ez a lineáris kombináció csak triviális módon áll elő, vagyis $\forall k \in \mathbb{N} : \alpha_k = 0$.

Ha $\exists$ egy lineárkombinációnk, amiből megkapjuk a $\vec{0}$; ~~akkor~~ és az ezt alkotó $\vec{e}^{(k)}$ vektorok nem lineárisan függetlenek, akkor ezek számát a lineáris függetlenségig lehet csökkenteni:

$$\sum_k \xi_k \vec{e}^{(k)} = \vec{0} \qquad \xi_n \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}^{(n)} = -\sum_k^{n-1} \xi_k \vec{e}^{(k)} \cdot \frac{1}{\xi_n}$$

Mikor elérjük odáig, hogy a megmaradt $\vec{e}$ vektorok lineárisan függetlenek (, de kezdetben és ezáltal most is kifeszítik az <u>EGÉSZ</u> vektorteret) akkor ezek alkotják az adott vektortér <u>bázisvektorait</u>.

A bázisvektorok maximális száma adja meg egy lineáris tér <u>dimenzióját</u>.

pl.: $\vec{0}$ - nulladimenziós (triviális) vektortér

$\vec{a}$ - kifeszít egy egyenest (1D vektortér)

$\vec{a}, \vec{b}$, ha lineárisan függetlenek, akkor kifeszítenek egy síkot (2D vektortér)

A tér jellemzője a dimenzió és <u>NEM FÜGG</u> a bázisvektorok megválasztásától.

Geometriai vektorok között nincs legegyszerűbb bázis, azaz ∀ választott bázis és annak bázisvektorai egyenértékűek.

Tétel:
Tetszőleges $\vec{v} \in W$ előállítható a választott bázis ~~vektoraim~~ ~~ain~~ vektorainak lineárkombinációjaként!

Biz.: $\dim W = n$

$\vec{b}^{(1)}, \ldots, \vec{b}^{(n)}$: bázisvektorok

$\left\{ \vec{b}^{(k)} \right\}_{k=1}^{n}$: ezek lineárisan függetlenek. Ha $\vec{v}$ vektorral és $\vec{b}^{(k)}$ bázisvektorokkal alkotunk lineárkombinációt, akkor: a $\vec{0}$ vektor csak nem triviálisan jöhet ki:

$$\alpha_0 \vec{v} + \alpha_1 \vec{b}^{(1)} + \alpha_2 \vec{b}^{(2)} + \ldots + \alpha_n \vec{b}^{(n)} = \vec{0} \quad \exists \alpha_k \in \mathbb{S}$$

$$\alpha_0 \vec{v} = (-\alpha_1 \vec{b}^{(1)}) + (-\alpha_2 \vec{b}^{(2)}) + (-\alpha_3 \vec{b}^{(3)}) + \ldots + (-\alpha_n \vec{b}^{(n)})$$

$\alpha_0 \vec{v} \neq \vec{0}$: mivel $\alpha_0 \neq 0$ (és $\vec{v} \neq 0$) és mivel $\sum_e \alpha_e \vec{b}^{(l)}$ vektorok lineárkombinációjaként csak egyféleképpen áll elő $\vec{0}$, ezért:

$$\vec{v} = \underbrace{\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)}_{v_{k=1}} \vec{b}^{(1)} + \ldots + \underbrace{\left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)}_{v_{k=n}} \vec{b}^{(n)}$$

$$\boxed{\vec{v} = \sum_k v_k \vec{b}^{(k)}}$$

Q.E.D.

Egy vektor megadása adott bázison egyértelmű!

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \sum_k \alpha_k \vec{b}^{(k)} \\ \vec{v} = \sum_k \beta_k \vec{b}^{(k)} \end{array}\right\} \quad \vec{0} = \sum_k (\alpha_k - \beta_k) \vec{b}^{(k)} \Leftrightarrow \alpha_k - \beta_k = 0 \quad \forall k$$

③ Vektorok és vektorműveletek reprezentációja ortonormált bázison

Reprezentálás:

① Adott bázis választása esetén $\left\{\vec{b}^{(k)}\right\}_{k=1}^{n}$; $n = \dim V$;

tetszőleges $\vec{v}$ megadható $\vec{b}^{(k)}$ bázisvektorok lineár-kombinációjaként:

$$\vec{v} = v_1 \vec{b}^{(1)} + v_2 \vec{b}^{(2)} + \dots + v_n \vec{b}^{(n)}$$

Ha és a bázis adott, akkor $\vec{v}$ reprezentálható egy n-tagú számoszloppal, melynek a bázisvektorok együtthatóit tartalmazzák.

$$\Rightarrow \vec{v} \to \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^n \quad (\text{, mivel } v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{S})$$

Vektorösszeadás:

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \longrightarrow \underline{v} = \underline{a} + \underline{b} : {}^{*}\boxed{v_k = a_k + b_k} \quad \text{és} \quad \vec{v}, \vec{a}, \vec{b} \in V_n$$

(ugyanazon a bázison reprezentáll)

Biz.: $\vec{v} = v_1 \vec{b}^{(1)} + \dots + v_n \vec{b}^{(n)} = \left(a_1 \vec{b}^{(1)} + \dots + a_n \vec{b}^{(n)}\right) + \left(b_1 \vec{b}^{(1)} + \dots + b_n \vec{b}^{(n)}\right)$

$$= \underbrace{(a_1 + b_1)}_{v_1} \vec{b}^{(1)} \quad \Rightarrow {}^{*} \left(\text{mivel } (\alpha \vec{a}) + (\beta \vec{a}) = (\alpha + \beta)\vec{a}\right)$$

→ skalárral való szorzás tulajdonsága

Skalárral való szorzás

$$\alpha \vec{v} = \vec{w} \rightarrow \underline{w} = \alpha \underline{v} : (\underline{w})_k = \alpha v_k$$

$$\alpha \left(v_1 \vec{b}^{(1)} + \dots + v_n \vec{b}^{(n)}\right) = (\alpha v_1) \vec{b}^{(1)} + \dots + (\alpha v_n) \vec{b}^{(n)}$$

Skaláris szorzás

$$\dim V = n \quad \left\{\vec{b}^{(k)}\right\}_{k=1}^{n} \quad \vec{v} = \sum_{l=1}^{n} v_l \vec{b}^{(l)}$$

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{b}^{(k)}$$

Ezek skaláris szorzata egy olyan kommutatív mennyiség, amely:

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u} = \sum_k \sum_l u_k v_l \underbrace{\vec{b}^{(k)} \vec{b}^{(l)}}$$

$\Rightarrow$ ez a lényeges (!)

$\vec{b}^{(k)}\vec{b}^{(l)}$ egy olyan kétindexes mennyiség, g_{kl}, ami szimmetrikus, azaz: $g_{kl} = g_{lk}$ és, ha azt akarjuk, hogy a reprezentált skaláris szorzásra u_k, v_l együtthatók között a következő összefüggés teljesüljön:

$$\sum_k u_k v_k = \vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$$

, akkor ez csak úgy teljesülhet, ha $\vec{b}^{(l)}\vec{b}^{(k)}$ szorzat $= \begin{cases} 1, \text{ ha } l = k \\ 0, \text{ ha } l \neq k \end{cases}$. Vagyis g_{kl} olyan kétindexes mennyiség, amely akkor és csak akkor 1, ha $k = l$, a többi esetben 0.

$$v_l \vec{b}^{(k)}\vec{b}^{(l)} = \begin{cases} v_l, \text{ ha } k = l \Rightarrow v_k \\ 0, \text{ ha } k \neq l \end{cases}$$

Így ortonormált bázist kapunk, mivel a bázisvektorok, amelyek azonos indexűek, szorzata egyenlő eggyel, míg a különböző indexekre azonosan 0.

$$\begin{matrix} \underset{(=1)}{\vec{b}^{(1)}\vec{b}^{(1)}} & & \cdots & 0 \\ & \underset{(=1)}{\vec{b}^{(2)}\vec{b}^{(2)}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ & & & \underset{(=1)}{\vec{b}^{(n)}\vec{b}^{(n)}} \\ 0 & \cdot & & \end{matrix}$$

(!) A skaláris szorzás alaptulajdonsága természetesen, hogy: $|\vec{a}| \geq 0$: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, akkor mondjuk, hogy két vektor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk 0 ~~é~~. (A $\vec{0}$-t minden vektorra merőlegesnek tekintjük)

Vektoriális - szorzás

$\vec a \times \vec b = \vec c$ $\quad \vec a, \vec b \mapsto \vec c$ $\quad$ Alaptulajdonságai

$\vec c \perp \vec a$ és $\vec c \perp \vec b$

dim V = 3

(csak 3D-ban $|\vec c| = |\vec a||\vec b|\sin\varphi$ értelmezett művelet!)

Levi-Civita-együttható:

$$\vec e^{(k)} \times \vec e^{(l)} = \sum_m \boxed{\varepsilon_{klm}}\, \vec e^{(m)}$$

A bázis ortonormált, azaz $\vec e^{(k)}\vec e^{(l)} = \delta_{kl}$

BA.: Legyen egy $n = \dim V$ lineáris téren értelmezett $*$-os műveletünk, amely disztributív ~~és a bázis~~ és $V \ast V \to V$ megy!

$$\vec v = \sum_k v_k \vec b^{(k)} \qquad \vec u = \sum_m u_m \vec b^{(m)}$$

$$\vec v * \vec u = \sum_m\sum_k v_k u_m \underbrace{\boxed{\vec b^{(k)} * \vec b^{(m)}}}_{\text{egy vektor, azaz a bázison leírható!}} = \vec w$$

$$\Rightarrow \quad \vec b^{(k)} * \vec b^{(m)} = C_1^{km}\vec b^{(1)} + \dots + C_n^{km}\vec b^{(n)}$$

$$\vec b^{(k)} * \vec b^{(m)} = \sum_p \boxed{C_p^{km}}\, \vec b^{(p)}$$

→ Az algebra struktúraállandóinak hívják.

$$\Rightarrow \quad \vec v * \vec u = \sum_m\sum_k v_k u_m \sum_p C_p^{km}\vec b^{(p)} = \sum_p \underbrace{\left(\sum_m\sum_k C_p^{km} v_k u_m\right)}_{w_p} \vec b^{(p)}$$

$$w_p = \sum_m\sum_k C_p^{km} v_k u_m$$

↳ 27 db szám, ha $\dim V = 3$ és a vektoriális szorzás műveletéről beszélünk.

Vektoriális szorzásnál ezt hívjuk (ε_{klm}) Levi-Civitának.

$$w_k = (\underline v \times \underline u)_k = \sum_l\sum_m \varepsilon_{klm} v_l u_m$$

, ahol ε_{klm} tulajdonságai* alapján:

$$w_1 = v_2 u_3 - v_3 u_2$$
$$w_2 = v_3 u_1 - v_1 u_3$$
$$w_3 = v_1 u_2 - v_2 u_1$$

*Teljesen antiszimmetrikus mennyiség:

$$\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{mkl} = \varepsilon_{lmk} = -\varepsilon_{kml} = -\varepsilon_{lkm} = -\varepsilon_{mlk}$$

<u>Vegyesszorzat</u>

$\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) \longrightarrow$ reprezentálva adott bázison $\underline{a}(\underbrace{\underline{b}\times\underline{c}}_{\underline{u}})$

$$\underline{a}\,\underline{u} = \sum_k a_k u_k = \sum_k a_k (\underline{b}\times\underline{c})_k = \sum_k a_k \sum_l \sum_m \varepsilon_{klm} b_l c_m$$

$$= \sum_k \sum_l \sum_m \varepsilon_{klm} a_k b_l c_m$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Ennek a mennyiségnek a rövidítésére $\underline{a}$ $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorokat elhelyezhetjük egymás mellé függőlegesen.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \sum_k \sum_l \sum_m \varepsilon_{klm} a_k b_l c_m$$

Ez több dimenzióra is értelmezhető!

(Több dimenziós Levi-Civita ...)

Diadikus szorzás $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{L}_{\mathbb{V}}$ (!)

$$\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\vec{v}) \equiv (\vec{a} \circ \vec{b})\vec{v} \;\longrightarrow\; \underline{c} = \underline{a}(\underline{b}\,\underline{v}) = \underbrace{(\underline{a} \circ \underline{b})}_{\underline{u}}\underline{v}$$

$$\Rightarrow \quad u_{km} = a_k b_m \Rightarrow \text{egy mátrix}$$

$$\underline{a} \circ \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Ez egy lineáris operáció mátrix reprezentációja lehet!

Scanned by CamScanner

④ A Kronecker- és a Levi-Civita-szimbólumok

(Értelmezése és használata)

Vektorok skaláris szorzását, kommutatív, $V \times V \to \mathbb{R}$ rendelő függvényként értelmeztük, alaptulajdonsága pedig:

$|\vec{a}| \geq 0$; $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, és két vektor akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0.

(A $\vec{0}$ mindenkire merőleges.)

$$\vec{v}\vec{u} = \sum_k \sum_l v_k u_l \underbrace{\vec{b}^{(k)}\vec{b}^{(l)}}_{g_{kl}}$$

Ezt a kétindexes mennyiséget értelmeztük úgy, hogy értéke 1, ha $k=l$ és 0, ha $k \neq l$.

Ezzel lényegében kimondtuk, hogy a különböző bázisvektorok merőlegesek és mivel az azonosak skaláris szorzata egy, így egységnyi hosszúak is. Ezt ortonormált bázisnak nevezzük

$$\vec{e}^{(k)}\vec{e}^{(l)} = \begin{cases} 1, \text{ ha } k=l \\ 0, \text{ ha } k \neq l \end{cases}$$

Ezt a ~~skaláris szorzás~~ kétindexes mennyiséget nevezzük Kronecker-deltának.

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0, \text{ ha } k \neq l \\ 1, \text{ ha } k=l \end{cases}$$

És ortonormált bázisra igaz, hogy:

$$\boxed{\vec{e}^{(k)}\vec{e}^{(l)} = \delta_{kl}}$$

Legfőbb tulajdonsága, hogy:

$$\boxed{\sum_l \delta_{kl} v_l = v_k}$$

⇒ Ezt a tulajdonságát használjuk ki indexes deriválásnál, lineáris transzformációknál.

A Levi-Civita-szimbólum egy olyan* 27 számot felölő mennyiség, amit (3 dimenzióban) a ~~statikus~~ vektoriális szorzás leírásához használhatunk fel
↳ Algebra celépző művelet!
Ez egy disztributív ~~...~~ $V_3 \times V_3 \to V_3$ rendelkező művelet leírásában segít, most 3D-ban:

$$\underline{w} = \underline{a} \times \underline{v} \Rightarrow \sum_k \sum_m \varepsilon_{lkm} a_k v_m = w_l$$

ortonormált bázison

27 számot jelöl!

A vektoriális szorzás tulajdonsága, hogy $\vec{a}, \vec{b} \mapsto \vec{c}$; $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ és úgy, hogy $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$ és $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$ és $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jobbsodrású rendszert alkotnak!
Ortonormált bázison két bázis vektor által alkotott vektoriális szorzat leírható a bázison, mivel az eredményül vektor a 3D-ős lin. tér eleme!

$$\vec{e}^{(1)} \times \vec{e}^{(1)} = 0\vec{e}^{(1)} + 0\vec{e}^{(2)} + 0\vec{e}^{(2)}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vec{e}^{(3)} \times \vec{e}^{(3)} = 0\vec{e}^{(1)} + 0\vec{e}^{(1)} + 0\vec{e}^{(3)}$$

Megtaláltuk a Levi-Civita-szimbólum 27 együtthatóját.

Ezekből leolvasható, hogy:

$$\vec{e}^{(k)} \times \vec{e}^{(l)} = \sum_m \varepsilon_{klm} \vec{e}^{(m)}$$

→ Valamint ~~...~~ ε_{klm} egy teljesen antiszimmetrikus mennyiség:

$$\varepsilon_{123} = 1 \qquad \varepsilon_{132} = -1$$

$$\varepsilon_{312} = 1 \qquad \varepsilon_{213} = -1$$

$$\varepsilon_{231} = 1 \qquad \varepsilon_{321} = -1$$

Az összes többi értéke 0!

Értelmezhető magasabb dimenzióban is! (Kötegpolc-tétel)

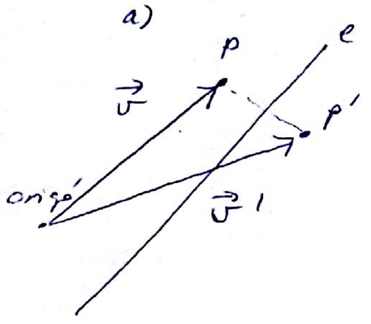
5 Lineáris transzformációk

(A sík és a tér transzformációi, példák)

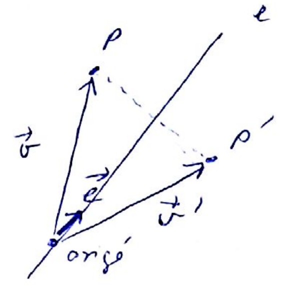
Síktranszformációk:

1) Tükrözés (projekció)

a)



b)



Hogyan állítható elő $\vec{v}'$ vektor $\vec{v}$ segítségével?

→ Legyen egy az e egyenessel párhuzamos egységvektorunk $\vec{e}$.

1. $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$: $\vec{v}' = \vec{v}_{\parallel} - \vec{v}_{\perp}$

$\vec{v} = \lambda\vec{e} + \vec{v}_{\perp}$ $/ \cdot \vec{e}$

$\vec{v}\vec{e} = \lambda\underbrace{\vec{e}\vec{e}}_{=1} + \underbrace{\vec{v}_{\perp}\vec{e}}_{\equiv 0 \text{ (skaláris szorzás tul.)}} \Rightarrow \lambda = \vec{v}\vec{e}$: $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - (\vec{v}\vec{e})\vec{e}$

→ Vagyis $\vec{v}' = (\vec{v}\vec{e})\vec{e} - \vec{v} + (\vec{v}\vec{e})\vec{e} = 2(\vec{e} \circ \vec{e})\vec{v} - \vec{v}$

A műveletet, amely $\vec{v}$-ből e egyenessel párhuzamos $\vec{v}_{\parallel}$ csinál projekciónak hívjuk:

$$(\vec{v}\vec{e})\vec{e} = \vec{v}_{\parallel} \;:\; \vec{v}_{\parallel} = \underbrace{(\vec{e} \circ \vec{e})}\vec{v} = \hat{P}\vec{v}$$

Vegyük észre, hogy ez nem vektor, hanem vektorművelet!

Projekciónak nevezzük, mivel rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\hat{P}\vec{v} = \vec{v}_p \longrightarrow \hat{P}\vec{v}_p = \vec{v}_{pp}$$

$$\hat{P}\vec{v} = (\vec{e} \circ \vec{e})\vec{v} = \vec{e}(\vec{e}\vec{v}) \mapsto \hat{P}\vec{v}_p = \vec{e}\big(\underbrace{\vec{e}(\vec{e}(\vec{e}\vec{v}))}_{\vec{a}(\beta\vec{b}) = \beta(\vec{a}\vec{b})}\big) = \vec{e}\big(\underbrace{\vec{e}\vec{e}}_{=1}(\vec{e}\vec{v})\big)$$

Tehát $\boxed{\hat{P}^2 = \hat{P}}$ $\forall \vec{v} \in V$

A projekció műveletét leíró vektoroknak rendelkezniük kell azzal a tulajdonsággal, hogy skaláris szorzatuk $\underline{\underline{1}}$!

→ Tovább lépve: A tükrözött vektor: $\vec{v}\,' = \vec{v}_{\parallel} - \vec{v}_{\perp}$

$$\vec{v}\,' = 2\vec{e}(\vec{e}\vec{v}) - \vec{v} = 2(\vec{e}\circ\vec{e})\vec{v} - \underset{\downarrow}{\hat{I}}\vec{v} = (2\hat{P} - \hat{I})\vec{v}$$

egységoperátor, tulajdonsága, hogy

$\forall \vec{v} \in V$: $\hat{I}\vec{v} = \vec{v}$.

$\hat{T} = 2\hat{P} - \hat{I}$: A tükrözés operátor tehát a operátorok lineárkombinációjaként áll elő, tulajdonsága:

$$\hat{T}\vec{v} = \vec{v}\,' \qquad \hat{T}\vec{v}\,' = \vec{v}\,''$$

$$\vec{v}\,' = (2\hat{P} - \hat{I})\vec{v} \qquad \vec{v}\,'' = (2\hat{P} - \hat{I})\left[(2\hat{P} - \hat{I})\vec{v}\right] =$$

$$= (2\hat{P} - \hat{I})^2\vec{v} = \underbrace{4\hat{P}^2}_{4\hat{P}} - \underbrace{4\hat{P}\hat{I}}_{\hat{P}} + \underbrace{\hat{I}^2}_{\hat{I}} = \hat{I}$$

(mivel $\hat{P}(\hat{I}\vec{v}) = \hat{P}\vec{v} = \vec{v}_P$)

$$\boxed{\hat{T}^{(2)} = \hat{I}}$$

↳ jelentése az, hogy ezt a műveletet kétszer fogjuk után hajtjuk végre.

, ha a bezdeti egyenletekből kifejezem $\vec{v}_{\perp}$ vektort:

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} = \hat{I}\vec{v} - \hat{P}\vec{v} = (\hat{I} - \hat{P})\vec{v}$$

, létezik olyan operátor, ami $\vec{v}$-ből előállítja annak e egyenesre vett merőleges vetületét!

$$\hat{Q} = \hat{I} - \hat{P} \quad ; \text{mivel } \hat{T} = 2\hat{P} - \hat{I} \quad \left(\hat{P} = \frac{\hat{T} + \hat{I}}{2}\right)$$

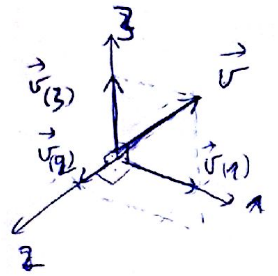
$\Rightarrow \hat{Q} = \dfrac{-\hat{T} + \hat{I}}{2}$; amiről könnyen beláthatjuk, hogy projekció ⚠

$$\hat{Q}\hat{Q} \stackrel{!}{=} \frac{(-\hat{T} + \hat{I})}{2}\frac{(-\hat{T} + \hat{I})}{2} = \frac{\overset{\nearrow \hat{I}}{\hat{T}^2} - \overset{\nearrow 2\hat{T}}{2\hat{T}\hat{I}} + \overset{\nearrow \hat{I}}{\hat{I}}}{4} = \frac{\hat{I} - \hat{T}}{2} = \hat{Q}$$

⇒ ebből felírhatjuk, hogy egy vektor előáll: $\vec v = \vec v_\parallel + \vec v_\perp = \hat P\vec v + \hat Q\vec v$; ahol

$\hat P + \hat Q = \hat I$ (ez következik abból is, hogy $\hat P + \hat I - \hat P = \hat I$ ✓).

Ugyan ezt az eljárást térben is elvégezhetjük, adott bázison egységvektorokkal (, vagy olyan vektorokkal, amelyek skaláris szorzata 0!).



1) $\vec v = \hat P_{(1)}\vec v + \hat P_{(2)}\vec v + \hat P_{(3)}\vec v$; ahol

$\hat P_{(1)}^2 = \hat P_{(1)}$; $\hat P_{(2)}^2 = \hat P_{(2)}$; $\hat P_{(3)}^2 = \hat P_{(3)}$

, valamint igaz az, hogy:

$$\boxed{\hat P^{(k)}\hat P^{(l)} = \delta_{kl}\hat P^{(k)}}$$

1) állításból következik, hogy $\sum_k \hat P^{(k)} = \hat I$

De mi is az a lineáris operátor?

A lineáris operátorok, a vektorok lineáris terén értelmezett függvény, amely ~~V~~ $V \to V$ rendel: $\vec v \mapsto \vec u = \hat A\vec v$.

Azért lineáris, mert I) homogén: $\hat A(\alpha\vec v) = \alpha(\hat A\vec v)$ és II) additív

$\hat A(\vec v_1 + \vec v_2) = \hat A\vec v_1 + \hat A\vec v_2$

$\forall \vec v_1, \vec v_2, \vec v \in V$ és $\forall \alpha \in \mathbb{T}$

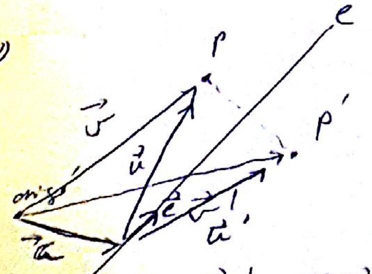
Az operátorok lineáris teret alkotnak (!), de ezen felül egymással is, és számmal is szorozhatóak, azaz ALGEBRÁT alkotnak:

I) homogén és additív

II) számmal szorzás és egymással való szorzás alkalmazható

III) asszociatív is (operációk soros kapcsolása)

a)



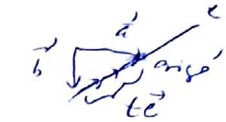
$\vec u' = \vec u_\parallel - \vec u_\perp$; $\vec v' = \vec a + \vec u'$

$\vec u' = \hat T\vec u$; $\vec v = \vec a + \vec u$

$\vec v' = \vec a + \hat T\vec u = \vec a + 2[\vec e(\vec e\vec u)] - \vec u = \vec a + 2[\vec e(\vec e(\vec v - \vec a))] - \vec v + \vec a$

$\vec v' = \underbrace{2\vec a - 2\vec e(\vec e\vec a)}_{\vec c} \cancel{+} + \underbrace{2\vec e(\vec e\vec v) - \vec v}_{\hat T\vec v} = \hat T\vec v + \vec c$

Ez bármilyen $\vec a$ vektort választva igaz: $\vec b = \vec a + t\vec e$



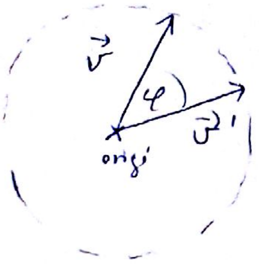
$$\vec v\,' = 2(\vec a + t\vec e) - 2\vec e\left(\vec e(\vec a + t\vec e)\right) + 2\vec e(\vec e\,\vec r) - \vec v$$

$$\vec v\,' = \underbrace{2\vec a - 2\vec e(\vec e\vec a)}_{\vec c^{\,*}} + \underbrace{2t\vec e - 2\vec e(\vec e\vec e t)}_{\equiv 0} + \hat T \vec v$$

→ Az eredmény mértékinvariáns

t paramétertől független!

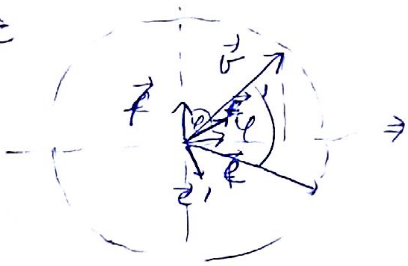
ii) Forgatás (térben és síkban)



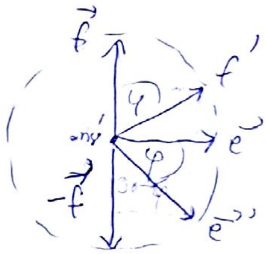
Legyen: $\vec v = \alpha\vec e + \beta\vec f$; ahol $\vec e\vec f = 0$

, ekkor $\vec v\,' = \alpha\vec e\,' + \beta\vec f\,'$ $\quad |\vec e| = 1$; $|\vec f| = 1$

$\vec v$



⇒



$$\Rightarrow \vec e\,' = \vec e\underbrace{(\vec e\,'\vec e)}_{\cos\varphi} + \vec f\underbrace{(-\vec f\vec e\,')}_{|\vec f||\vec e\,'|\underbrace{\cos(90^\circ - \varphi)}_{\sin\varphi}} = \vec e\cos\varphi - \vec f\sin\varphi$$

$$\vec f\,' = \vec f\cos\varphi + \vec e\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \vec v\,' = \alpha(\vec e\cos\varphi - \vec f\sin\varphi) + \beta(\vec f\cos\varphi + \vec e\sin\varphi)$$

$$\vec v\,' = \underbrace{(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)}_{\alpha'}\vec e + \underbrace{(\beta\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)}_{\beta'}\vec f = \cos\varphi(\alpha\vec e + \beta\vec f) + \sin\varphi\boxed{(\beta\vec e - \alpha\vec f)} =$$

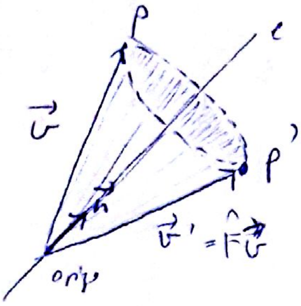
$$= \vec v\cos\varphi + \hat J\vec v\sin\varphi$$

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha' &= \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi \\ \beta' &= -\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi\end{aligned}} \xrightarrow{\text{algebrával jön ki!}} \boxed{\begin{aligned}\alpha'' &= \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi = \alpha\cos(-\varphi) + \beta\sin(-\varphi) \\ \beta'' &= \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi = -\alpha\sin(-\varphi) + \beta\cos(-\varphi)\end{aligned}}$$

↳ El-forgatás síkban φ szöggel, visszaforgatás φ: $(-\varphi)$ szöggel!

Térbeli forgatás

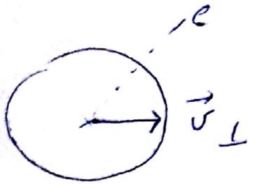
Lényegében felbomlik egy adott tengely körüli síkú forgatásra!



$$\vec v = \vec v_\parallel + \vec v_\perp$$

$\vec v_\parallel$ az e tengely körüli forgatás során állandó (!), csak $\vec v_\perp$ változik!

Sík:



$$\vec v_\perp = \hat Q \vec v = \vec v - (\vec n \circ \vec n)\vec v$$

, akkor, hogy kezdetben síkban végre tudjuk hajtani a forgatást, két egyenlő hosszú, egymásra merőleges vektorra van szükségünk:

$$\vec v_\perp \to \vec v_\perp' = \hat J \vec v_\perp$$

↑ elforgatás operátor (síkban 90°-al!)

$$\left(\vec v_\perp = \alpha\vec e + \beta\vec f \to \vec v_\perp' = (\underbrace{\alpha\cos 90^\circ}_{=0} + \underbrace{\beta\sin 90^\circ}_{\beta})\vec e + (\underbrace{\beta\cos 90^\circ}_{=0} - \underbrace{\alpha\sin 90^\circ}_{=-\alpha})\vec f \right.$$

$$\left. = \beta\vec e - \alpha\vec f \right)$$

, de $\vec v_\perp'$ ~~más~~ két módon is előállítható. $\vec v_\perp' = \vec n \times \vec v_\perp$

$$\vec v_\perp' = \vec n \times \left(\vec v - \vec n(\vec n\vec v)\right) = \vec n\times\vec v - \vec n\times\vec n(\vec n\vec v)$$

, vagy:

$$\vec v_\perp = \alpha\vec e + \beta\vec f \; : \; \alpha = \vec v_\perp\vec e, \quad \beta = \vec v_\perp\vec f$$

$$\vec v_\perp' = \beta\vec e - \alpha\vec f = (\vec v_\perp\vec f)\vec e - (\vec v_\perp\vec e)\vec f = \underbrace{(\vec e\circ\vec f - \vec f\circ\vec e)}_{\hat J}\vec v_\perp$$

⇒ Tetszőleges elforgatás így előáll:

$$\boxed{\vec v_\perp(\varphi) = \vec v\cos\varphi + \sin\varphi\,\hat J\vec v}$$

Az elforgatás előállítása:

$$\hat{F}\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}(\varphi) = \vec{n}(\vec{n}\vec{v}) + \cos\varphi\,\vec{v}_{\perp} + \sin\varphi\,\underbrace{(\vec{n}\times(\vec{v}-\vec{n}(\vec{n}\vec{v})))}_{(\vec{n}\times\vec{v}_{\perp})}$$

$$\hat{F}\vec{v} = \vec{n}(\vec{n}\vec{v}) + \underbrace{\cos\varphi\,\vec{v}_{\perp}}_{\cos\varphi(\vec{v}-\vec{n}(\vec{n}\vec{v}))} + \sin\varphi(\vec{n}\times\vec{v})$$

$$\vec{v}' \quad \boxed{\hat{F}\vec{v} = (\vec{v}\vec{n})\vec{n}\,(1-\cos\varphi) + \vec{v}\cos\varphi + (\vec{n}\times\vec{v})\sin\varphi}$$

A lineáris operátorok reprezentációja ortonormált bázison:

1) $\hat{F}\vec{v} \to \underline{\underline{F}}\,\underline{v} = \underline{v}'$

$$(\underline{v}')_k = n_k\underbrace{(\vec{v}\vec{n})}_{\sum_l n_l v_l}(1-\cos\varphi) + \underbrace{v_k}_{\sum_l \delta_{kl} v_l}\cos\varphi + \sum_{l}\sum_{m}\varepsilon_{klm} n_m v_l \sin\varphi$$

$$(\underline{v}')_k = \sum_l \underbrace{\left(n_l n_k(1-\cos\varphi) + \delta_{kl}\cos\varphi + \sum_m \varepsilon_{klm} n_m \sin\varphi\right)}_{F_{kl}} v_l$$

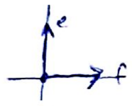
II) $\hat{P}: \vec{e}\circ\vec{e} \Rightarrow \vec{e}_l\vec{e}_k = c_{lk} = (\underline{\underline{P}})_{lk}$

6 Lineáris transzformációk reprezentálása ortonormált bázison

I) $\vec{v}_{\parallel} = \vec{e}(\vec{e}\vec{v}) = \underbrace{(\vec{e} \circ \vec{e})}_{\hat{P}}\vec{v}$: projekció

II) $\vec{v}\,' = 2(\vec{e} \circ \vec{e})\vec{v} - \vec{v}$: tükrözés

III) $\vec{w}\,' = \underbrace{((\vec{f} \circ \vec{e}) - (\vec{e} \circ \vec{f}))}_{\hat{J}}\vec{w}$: $90°$-os forgatás (síkban) (!)*



IV) $\vec{v}(\varphi) = \vec{v}\cos\varphi + \sin\varphi\, \hat{J}\vec{v}$: φ-szögű forgatás (síkban) (!)*

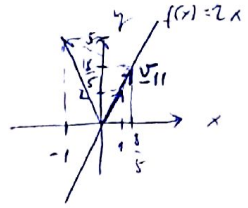
V) $\vec{v}(\varphi) = (\vec{v}\vec{n})\vec{n}\,[1-\cos\varphi] + \vec{v}\cos\varphi + (\vec{n}\times\vec{v})\sin\varphi$: tetszőleges tengely körüli φ-szögű forgatás (!)*
(térben)

I) $\underline{v}' = (\underline{e} \circ \underline{e})\,\underline{v}$; ahol a diádot úgy kapjuk, hogy

$\underline{e} \circ \underline{e} = \underline{\underline{P}}$ ← egy kétindexes mennyiség (mátrix!)

$$\boxed{P_{km} = e_k e_m}$$

pl.:



$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{P}} = \underline{e} \circ \underline{e} = \underline{e}\tilde{\underline{e}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(1\ 2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

diadikus szorzás

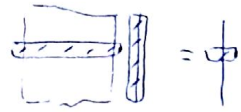
A merőlegesen tükröző projektor $\hat{I} - \hat{P} = \hat{Q}$

$\Rightarrow \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

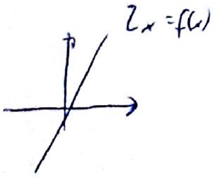
$\Rightarrow \underline{v}_{\parallel} = \underline{\underline{P}}\,\underline{v} \Rightarrow (\underline{v}_{\parallel})_k = \sum_k P_{mk} v_k$

$\underline{v}_{\parallel} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}$



II) $\underline{v}' = (2(\underline{e} \circ \underline{e}) - \underline{\underline{I}})\,\underline{v} = (2\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{I}})\,\underline{v} = \underline{\underline{T}}\,\underline{v}$

pl.



$\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow 2\underline{\underline{P}} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{v} = \underbrace{\frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right]}_{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 23 \\ 11 \end{pmatrix}$

III) $\underline{w}' = (\underline{f}\circ\underline{e} - \underline{e}\circ\underline{f})\underline{w}$

$(\underline{w}')_1 = \sum_k (\underline{f}\circ\underline{e} - \underline{e}\circ\underline{f})_{1k}(\underline{w})_k = \sum_k (f_1 e_k - e_1 f_k) w_k$

$= \sum_k f_1 e_k w_k - \sum_k e_1 f_k w_k = f_1(\underline{e}\,\underline{w}) - e_1(\underline{f}\,\underline{w})$

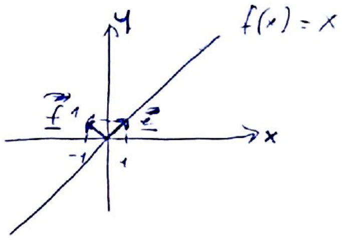
IV) $\underline{v}(\varphi) = \underline{v}\cos\varphi + \sin\varphi\, \underline{\underline{J}}\,\underline{v} = \underline{v}\cos\varphi + \sin\varphi(\underline{f}\circ\underline{e} - \underline{e}\circ\underline{f})\underline{v}$

$(\underline{v}(\varphi))_k = v_k\cos\varphi + \sin\varphi\left(f_k(\underline{e}\,\underline{v}) - e_k(\underline{f}\,\underline{v})\right)$

$\sum_l \delta_{lk} v_l \qquad \sum_l e_l v_l \qquad \sum_l f_l v_l$

$$(\underline{v}(\varphi))_k = \sum_l \underbrace{\left(\delta_{kl}\cos\varphi + \sin\varphi\, f_k e_l - \sin\varphi\, e_k f_l\right)}_{F_{kl}} v_l$$

$\underline{v}(\varphi) = \underline{\underline{F}}\,\underline{v}$ pl.:



$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{f} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3}}$ Ezzel elő-állítható → a mátrix összes eleme(!) $F_{kl} = \delta_{kl}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) f_k e_l - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) e_k f_l$

$F_{11} = \delta_{11}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})$

$F_{12} = \delta_{12}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F_{21} = \delta_{21}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$F_{22} = \delta_{22}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$

$$\underline{\underline{F}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

V) $\underline{v}(\varphi) = (\underline{v}\,\underline{n})\,\underline{n}\left[1-\cos\varphi\right] + \underline{v}\cos\varphi + (\underline{n}\times\underline{v})\sin\varphi$

$$\left[\underline{v}(\varphi)\right]_k = \underbrace{(\underline{v}\,\underline{n})}_{\sum_m n_m v_m} n_k\left[1-\cos\varphi\right] + \underbrace{v_k}_{\sum_m \delta_{km} v_m}\cos\varphi + \sum_l\sum_m \varepsilon_{klm}\, n_l\, v_m \sin\varphi$$

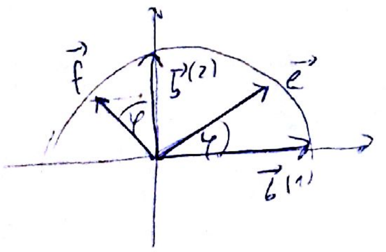
$$\left[\underline{v}(\varphi)\right]_k = \sum_m \underbrace{\left(n_m n_k\left[1-\cos\varphi\right] + \delta_{km}\cos\varphi + \sum_l \varepsilon_{klm}\, n_l \sin\varphi\right)}_{F_{km}} v_m$$

Itt már egy 3×3-as mátrixot kapunk, amiben $\underline{n}$ egy tengely irányába mutató egység(!) vektor, $\underline{v}$ pedig egy tetszőleges vektor

IV) Legyen: $\boxed{J_{kl} = f_k e_l - e_k f_l}$; mivel

$$\underline{w}' = (\underline{f}\circ\underline{e} - \underline{e}\circ\underline{f})\,\underline{w}$$

$$(w'_k) = \sum_m \underbrace{(\underline{f}\circ\underline{e} - \underline{e}\circ\underline{f})_{km}}_{=\,(f_k e_m - e_k f_m)}(w_m)$$



$(f_k e_m - e_k f_m) =$

$\vec e = \cos\varphi\,\vec b^{(1)} + \sin\varphi\,\vec b^{(2)} \rightarrow \underline{e} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

$\vec f = -\sin\varphi\,\vec b^{(1)} + \cos\varphi\,\vec b^{(2)} \rightarrow \underline{f} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \underline{f}\circ\underline{e} - \underline{e}\circ\underline{f} = \begin{pmatrix}-\sin\\ \cos\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos & \sin\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin & \cos\end{pmatrix}$$

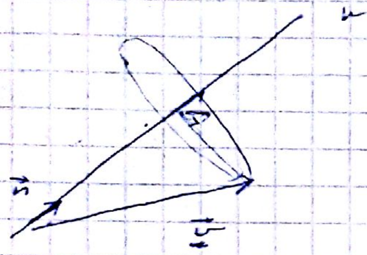
$$= \begin{pmatrix}-\sin\cos & -\sin^2\\ \cos^2 & \sin\cos\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\sin\cos & \cos^2\\ -\sin^2 & \sin\cos\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Nem meglepő az eredmény, hiszen algebrailag is kijött ue!

$\vec v = \alpha\vec e + \beta\vec f \Rightarrow \vec v\,'(90^\circ) = \beta\vec e - \alpha\vec f$

Térbeli forgatás

$|\vec{n}|=1$



$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$

$\vec{v}_{\parallel} = \vec{n}(\vec{n}\vec{v})$

$$\boxed{\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{n}(\vec{n}\vec{v})}$$

$$\vec{v}_{\perp}(\varphi) = \cos\varphi\,\vec{v}_{\perp} + \sin\varphi\,\hat{J}\vec{v}_{\perp}$$

$$\hat{J}\vec{v}_{\perp} = \vec{n}\times\vec{v}_{\perp} = \vec{n}\times(\vec{v} - \vec{n}(\vec{n}\vec{v}))$$

$$\hat{J}\vec{v}_{\perp} = \vec{n}\times\vec{v}$$

$$\vec{v}_{\perp}(\varphi) = \cos\varphi\,(\underbrace{\vec{v}-\vec{n}(\vec{n}\vec{v})}_{(\vec{v}\hat{I} - (\vec{n}\circ\vec{n})\vec{v})}) + \sin\varphi(\vec{n}\times\vec{v}) = \cos\varphi\,(\hat{I} - \vec{n}\circ\vec{n})\vec{v} + \sin\varphi(\vec{n}\times\vec{v})$$

$\vec{v}_{\perp}(\varphi)$

$$\vec{v}\,' = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}(\varphi) = \vec{n}(\vec{n}\vec{v}) + \cos\varphi(\vec{v} - \vec{n}(\vec{n}\vec{v})) + \sin\varphi(\vec{n}\times\vec{v})$$

$$\vec{v}\,' = \cos\varphi\,\vec{v} + (1-\cos\varphi)\,\vec{n}(\vec{n}\vec{v}) + \sin\varphi\,(\vec{n}\times\vec{v})$$

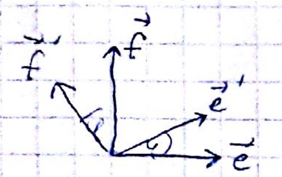
$$\underline{v}' = \cos\varphi\,\underline{v} + (1-\cos\varphi)\,\underline{n}(\underline{n}\,\underline{v}) + \sin\varphi(\underline{n}\times\underline{v})$$

$$(\underline{v}')_k = \cos\varphi\,\underbrace{v_k}_{\sum_m \delta_{km} v_m} + (1-\cos\varphi)\,n_k\sum_m n_m v_m + \sin\varphi\sum_l\sum_m \varepsilon_{klm} n_l v_m$$

$$(\underline{v}')_k = \sum_m \underbrace{\left(\delta_{km}\cos\varphi + (1-\cos\varphi)n_k n_m + \sin\varphi\sum_l \varepsilon_{klm} n_l\right)}_{F_{km}} v_m$$

90°-os forgatás

$$\vec{e}\,' = \vec{e}\cos\varphi + \vec{f}\cos\underbrace{(90-\varphi)}_{\cos 90\cos\varphi + \sin 90\sin\varphi} = \vec{e}\cos\varphi + \vec{f}\sin\varphi$$



$$\vec{f}\,' = \vec{e}\cos\underbrace{(90+\varphi)}_{\cos 90\cos\varphi - \sin 90\sin\varphi} + \vec{f}\cos\varphi = -\vec{e}\sin\varphi + \vec{f}\cos\varphi$$

$$\vec{v}\,' = \alpha\vec{e}\,' + \beta\vec{f}\,' = \alpha(\vec{e}\cos\varphi + \vec{f}\sin\varphi) + \beta(-\vec{e}\sin\varphi + \vec{f}\cos\varphi)$$

$$\vec{v}\,' = \cos\varphi\,(\underbrace{\alpha\vec{e} + \beta\vec{f}}_{\vec{v}}) + \sin\varphi\,(\alpha\vec{f} - \beta\vec{e})$$

$$\vec{v} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{f} \qquad \vec{e}\vec{f} = 0;\ \vec{e}\vec{e} = \vec{f}\vec{f} = 1$$

$$\vec{v}\vec{e} = \alpha \qquad \vec{v}\vec{f} = \beta$$

$$\vec{v} = \vec{e}(\underbrace{\vec{e}\vec{v}}_{\alpha}) + \vec{f}(\underbrace{\vec{f}\vec{v}}_{\beta})$$

$$\vec{v}\,'' = \cos\varphi\,\vec{v} + \sin\varphi\,\big(\underbrace{\vec{f}(\vec{e}\vec{v}) - \vec{e}(\vec{f}\vec{v})}_{(\vec{e}\times\vec{f})\times\vec{v}}\big) = \cos\varphi\,\vec{v} + \sin\varphi\,(\underbrace{\vec{f}\circ\vec{e} - \vec{e}\circ\vec{f}}_{\hat{J}})\vec{v}$$

$$\boxed{\hat{J} = \vec{f}\circ\vec{e} - \vec{e}\circ\vec{f}}$$

$$\hat{J}\vec{v} = \left[(\vec{f}\circ\vec{e}) - (\vec{e}\circ\vec{f})\right]\vec{v} = \vec{f}(\vec{e}\vec{v}) - \vec{e}(\vec{f}\vec{v})$$

o.n. bázisa

$$\left[\underline{f}(\underline{e}\,\underline{v}) - \underline{e}(\underline{f}\,\underline{v})\right] \quad : \quad \underline{e}, \underline{f}\text{-onbázist alkotnak}$$

$$\Rightarrow \left[\underline{f}(\underline{e}\,\underline{v}) - \underline{e}(\underline{f}\,\underline{v})\right]_k = f_k(e_l v_l) - e_k(f_l v_l) =$$

$$(\underbrace{f_k e_l - e_k f_l}_{J_{kl}})v_l = v_k \qquad J_{kl} = f_k e_l - e_k f_l$$

Feltüntetett, legyen

$$\mathcal{J}_{11} = f_1 e_1 - f_1 f_1 = 0$$

$$\mathcal{J}_{12} = f_1 e_2 - e_1 f_2 \qquad \text{, ha most } e_3 = 0 \text{ és } f_3 = 0$$

$$\mathcal{J}_{21} = f_2 e_1 - e_2 f_1 = -\mathcal{J}_{12}$$

$$\mathcal{J}_{33} = 0 \qquad \mathcal{J}_{22} = 0 \qquad \mathcal{J}_{23} = f_2 e_3 - e_2 f_3 (= 0)$$

$$\mathcal{J}_{13} = f_1 e_3 - e_3 f_1 (= 0) \qquad \mathcal{J}_{32} = f_3 e_2 - e_3 f_2 = -\mathcal{J}_{23} (= 0)$$

$$\mathcal{J}_{31} = f_3 e_1 - e_3 f_1 = -\mathcal{J}_{13}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\mathcal{J}}} = \underline{f} \circ \underline{e} - \underline{e} \circ \underline{f}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{J}}} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix} (e_1 \; e_2 \; 0) - \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 0 \end{pmatrix} (f_1 \; f_2 \; 0)$$

$$= \begin{pmatrix} f_1 e_1 - f_1 e_1 & f_1 e_2 - f_2 e_1 & 0 \\ f_2 e_1 - e_2 f_1 & f_2 e_2 - e_2 f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f_i e_k - e_i f_k = \mathcal{J}_{ik}$$

$$\vec{e}\,' = \vec{e} \cos\varphi + \vec{f} \sin\varphi \rightarrow e_k' = e_k \cos\varphi + f_k \sin\varphi$$

$$\vec{f}\,' = -\sin\varphi\, \vec{e} + \cos\varphi\, \vec{f} \rightarrow f_k' = e_k (-\sin\varphi) + f_k \cos\varphi$$

$$\begin{pmatrix} e_k' \\ f_k' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{F}}} \begin{pmatrix} e_k \\ f_k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{F}}(\varphi) \rightarrow \underline{\underline{F}}(90^\circ) = \underline{\underline{\mathcal{J}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

⑦ Lineáris transzformációkra értelmezett műveletek és reprezentációjuk

A lineáris operáció/transzformáció egy $V \to V$ rendelő függvény, tulajdonsága a linearitás: 1) additív és homogén:

$$\hat{A}(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) = \alpha(\hat{A}\vec{v}_1) + \beta(\hat{A}\vec{v}_2)$$

II) A következő műveleteket értelmezzük az operátorok halmazán.

$\mathbb{L}_V \ni \hat{A}$ 1) 'add': $\mathbb{L}_V \times \mathbb{L}_V \to \mathbb{L}_V$

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} : \forall \hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{L}_V \ (!) \ \exists \hat{C} \in \mathbb{L}_V$$

$$\Rightarrow \hat{C}(\vec{v}) = (\hat{A} + \hat{B})\vec{v} = \hat{A}\vec{v} + \hat{B}\vec{v}$$

← nem disztributivitás, hanem egy újonnan értelmezett művelet!

II) $\mathbb{S} \times \mathbb{L}_V \to \mathbb{L}_V$

$$\alpha \hat{A} = \hat{D}$$

$$\Rightarrow \hat{D}\vec{v} = (\alpha \hat{A})\vec{v} = \alpha(\hat{A}\vec{v})$$

Ebből következik, hogy a lineáris operátorok lineáris teret alkotnak!

Ezeken felül értelmezhetjük két operátor szorzatát is:

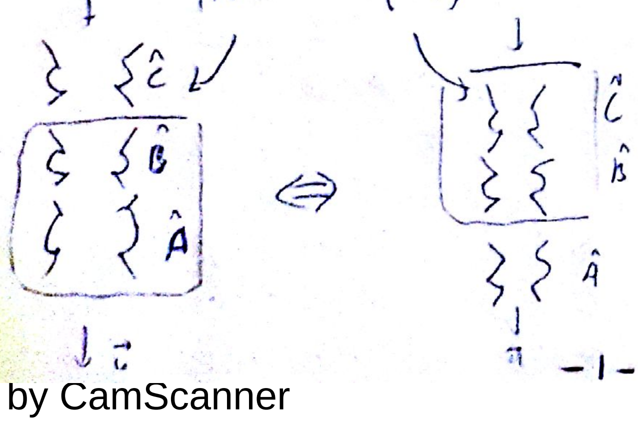
A szorzás nem kommutatív!

I) $\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}$ ← $(\hat{A}\hat{C})\vec{v} = \hat{A}(\hat{C}\vec{v})$

II) $\hat{A}(\alpha \hat{B}) = \alpha(\hat{A}\hat{B})$

Ezekkel a műveletekkel a lin. transzformációk algebrát alkotnak, méghozzá asszociatívat, mivel:

$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) \quad (!)$$



Hogyan rendelünk lineáris operátorhoz mátrixot!

$\vec{u} = \hat{A}\vec{v}$, $\vec{v} = \sum_k v_k \vec{b}^{(k)}$ Ha $\{\vec{b}^{(k)}\}$ bázison írom fel.

$\vec{u} = \hat{A}\left(\sum_k v_k \vec{b}^{(k)}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mivel} \\ \text{lineáris művelet!}}}{=} \sum_k v_k \left(\hat{A}\vec{b}^{(k)}\right) = \sum_k v_k \vec{c}^{(k)}$

VT lineáris téren $\vec{c}^{(k)}$ is felírhatóak $\vec{b}^{(k)}$ vektorok segítségével

$\Rightarrow \vec{c}^{(k)} = \sum_l A_{lk} \vec{b}^{(l)}$

$\vec{u} = \sum_k v_k \vec{c}^{(k)} = \sum_k \left(\sum_l A_{lk} \vec{b}^{(l)}\right) v_k = \sum_l \left(\sum_k A_{lk} v_k\right) \vec{b}^{(l)}$

$\parallel$

$\sum_l u_l \vec{b}^{(l)}$

$\Rightarrow u_l = \sum_k A_{lk} v_k \leftarrow$ így adott bázison u_l együtthatók egyértelműek, ha ismerem az operátor hatását a vektorra!

Tetszőleges bázisban tehát: $\vec{c}^{(k)} = \hat{A}\vec{b}^{(k)} = \sum_l A_{lk} \vec{b}^{(l)}$

legyen $\vec{B}^{(k)}$ a $\vec{b}^{(k)}$ bázishoz tartozó reciprokbázis!

Tudjuk, hogy ez def. szerint: $\vec{B}^{(k)}\vec{b}^{(l)} = \delta_{kl}$

$$\boxed{A_{kl} = \vec{B}^{(k)} \hat{A} \vec{b}^{(l)}}$$

Ortonormált bázisban pedig:

$$\boxed{A_{kl} = \vec{e}^{(k)} \hat{A} \vec{e}^{(l)}} \quad !$$

Mivel $\vec{u} = \hat{A}\vec{v}$; $\vec{v} = \sum_k v_k \vec{b}^{(k)}$ és $\vec{u} = \sum_m u_m \vec{b}^{(m)}$

$\vec{u} = \sum_k v_k \left(\hat{A}\vec{b}^{(k)}\right) \xrightarrow{\text{és}} \vec{B}^{(l)}\vec{u} = \sum_m u_m \vec{B}^{(l)}\vec{b}^{(m)} = u_l$

$\vec{B}^{(l)}\vec{u} = \underbrace{\sum_k v_k \left(\vec{B}^{(l)} \hat{A} \vec{b}^{(k)}\right)}_{\parallel \sum_k A_{lk} v_k = u_l} = u_l$ ⚠!

(8) Mátrixok és mátrixműveletek, speciális alakú mátrixok

Mátrix kétindexes mennyiség, számtáblázat / egy lineáris operáció reprezentációja adott bázisban)

A_{kl} k. sor, l. elem $\rightarrow$ $\underline{\underline{A}}_{(p\times q)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$

(mátrix egy eleme)

Csak olyan mátrixokat lehet összeszorozni amelyeknek ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora a másiknak.

$$C_{km} = \sum_l A_{kl} B_{lm} \quad \xleftrightarrow[\text{(l szerint)}]{\text{sor}} \quad \Big| \overset{\text{oszlop}}{} \text{(l hossza)}$$

A mátrix szorzás nem kommutatív, sőt lehet, hogy nincs is értelmezve (pl.: $\underline{\underline{A}}_{(2\times 2)} \underline{\underline{B}}_{(2\times 3)}$ ✓, viszont $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ értelmetlen!).

A mátrixszorzás nem zárt és nem kommutatív! (Általában!)

Egyoszlopos mátrix: oszlopvektor $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Egysoros mátrix: sorvektor $\tilde{\underline{v}} = (v_1 \dots v_n)$

$\underline{\underline{A}}^T$: transzponálás; def. szerint: $(\tilde{A}_{kl}) = A_{lk}$

Két mátrix akkor és csak akkor egyezik meg, ha minden elemük és nagyságuk is megegyezik.

Mátrix skalárszorosa: $(\alpha \underline{\underline{A}})_{kl} = \alpha A_{kl}$

Mátrixok összege: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$; $A_{kl} + B_{kl} = C_{kl}$

(csak azonos méretű mátrixokat lehet összeadni!)

Az adott nagyságú mátrixok lineáris teret alkotnak, mivel számmal szorozhatóak, összeadásra ~~szorzásra~~ zártak (csoportot alkotnak; méghozzá kommutatívat)!

A mátrixok lineáris terében léteznek bemenetek (legegyszerűbb bázis)! pl:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

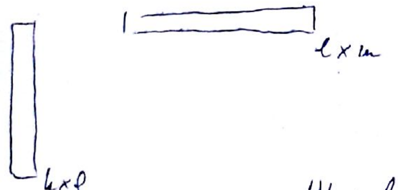
Speciális esetek

① Skalárok értelmezhetők (1×1)-es mátrixként

② $\underline{\tilde{a}}\, \underline{b}$: skaláris szorzás

$$c_{11} = \sum_l A_{1l} B_{l1} = \sum_l a_l b_l$$

③



$$c_{km} = \sum_l a_{kl} b_{lm} = a_k b_m$$

Itt: $l = 1$

Vektorok diadikus szorzata egy $\underline{\underline{C}}$ mátrix és ennek komponenseit az előbbi képlettel határozhatjuk meg.

④ Négyzetes mátrixok asszociatív algebrát alkotnak!
(Lineáris teret alkotnak, ezt már beláttuk.)
Szorzásra is zártak, és inverzük is „van", valamint a műveleti sorrend nem számít!

$$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})$$

Biz: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{G}}$

$\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}$

$$\rightarrow \sum_k F_{1k} C_{km} = \sum_k A_{1k} G_{km}$$

$$\sum_k \cancel{E_{km}} \underbrace{(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{1k}}_{\sum_p A_{1p} B_{pk}} = \sum_k A_{1k} \underbrace{(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})_{km}}_{\sum_p B_{kp} C_{pm}}$$

$$\sum_k \sum_p A_{1p} B_{pk} C_{km} = \sum_k \sum_p A_{1k} B_{kp} C_{pm}$$

$$\sum_p A_{1p} \left(\sum_k B_{pk} C_{km} \right) = \sum_p \left(\sum_k A_{1k} B_{kp} \right) C_{pm}$$

$$\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} \quad ✓$$

(**ÁH:**) Ha egy mátrixnak létezik inverze, akkor a baloldali inverz megegyezik!

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{I}} \qquad \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}} \quad \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$$

Nem minden mátrixnak van inverze, csak kvadratikus mátrixokra értelmezhető!

Speciális mátrixok

→ szimmetrikus mátrix:

$$A_{lk} = A_{kl} = (\tilde{A})_{kl}$$

antiszimmetrikus mátrix

$$-A_{lk} = A_{kl} = -(\tilde{A})_{kl}$$

→ hermitikus mátrix:

$$\underline{\underline{H}}^{+} = \underline{\underline{H}}$$

($\tilde{\square}^{*}$: mátrix komplex konjugáltja és transzponáltja!)

→ antihermitikus mátrix

$$\underline{\underline{H}}^{+} = -\underline{\underline{H}}$$

→ ortogonális mátrix

$$\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{\tilde{F}}} = \underline{\underline{I}} \rightarrow \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{\tilde{F}}} \quad \left(\sum_k F_{kl} F_{km} = \delta_{lm} \text{, mert } F_{kl} = (\tilde{F})_{lk} \Rightarrow \sum_k \tilde{F}_{lk} F_{km} = \delta_{lm} \right)$$

→ unitér mátrix:

$$\underline{\underline{U}}^{+}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{I}} \rightarrow \underline{\underline{U}}^{+} = \underline{\underline{U}}^{-1}$$

(9) Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk

(hom., inhom. eset, geometriai jelentés)

$$a_1\alpha + b_1\beta + \dots + x_1\omega = v_1$$
$$a_2\alpha + b_2\beta + \dots + x_2\omega = v_2$$
$$\vdots \qquad \ddots \qquad \vdots$$
$$a_n\alpha + \dots\dots = v_n$$

Ez a felírás kétféleképpen is értelmezhető!

(1)
$$\alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\omega = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(2)
$$\left.\begin{matrix} a_1\alpha + \dots x_1\omega & & v_1 \\ a_2\alpha + & & v_2 \\ & = & v_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n\alpha + \dots x_n\omega & & v_n \end{matrix}\right\} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & x_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_n & \dots & & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ értelmezhető olyan mátrixszorzásként, hogy egy ~~n×n~~ mátrixot szorzunk egy oszlopvektorral!

$$\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{v}}$$

Mindkétféleképpen megoldható az egyenletrendszer, de mátrixokkal számolni gyorsabb és egyszerűbb!

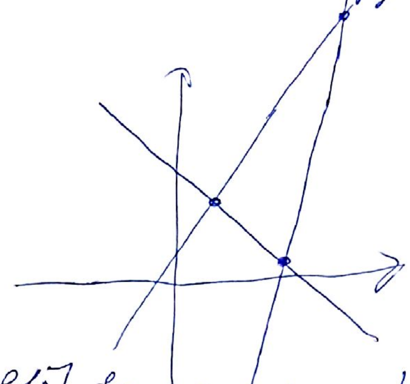
Homogén az egyenletrendszer, ha $\underline{v} = \underline{0}$ és inhomogén ha nem.

Homogén esetben a cél az, hogy nem triviális megoldást találjunk (azaz $\underline{x} \neq \underline{0}$), ehhez viszont az kell, hogy a mátrix sorai lineárisan összefüggők legyenek, azaz determinánsa legyen 0!

Inhomogén esetben a mátrix determinánsa nem lehet nulla, mert akkor csak triviális megoldása van az egyenletrendszernek (vagy egyáltalán nincs megoldása!). Ha determináns nem 0, akkor a mátrix invertálható!

$ax + by = c$ ← egy ilyen egyenlet síkban egy egyenest határoz meg!

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 12 \\ 7x_1 - 5x_2 &= 23 \end{aligned}$$



A két dimenziós síkon kijelöl egy-egy egyenessel ez a három egyenlet. Lehet, hogy egy megoldásuk van (egy közös metszéspont); lehet, hogy végtelen sok megoldásuk van; ekkor mindhárom egyenlet ua. az egyenest határozza meg(!) és lehet, hogy nincs megoldásuk!

$$x_1 - x_2 = 3$$

$$\Rightarrow (1 \ \ -1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3$$ Átírható ilyen alakban!

Ha három ismeretlenünk van, azok térben egy síkot határoznak meg!

$$ax + by + cz = d \Leftrightarrow (a \ \ b \ \ c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = d$$

Egy ilyen egyenletekből álló egyenletrendszernek lehet egy megoldása (3 egyenlet; a 3 sík 1 pontban metszi egymást); végtelen sok megoldás (1 egyenesben metszenek) valamint 0 megoldása, ha ~~egybees~~ párhuzamosak, de nem esnek egybe. Ha egybeesnek, akkor szintén végtelen megoldása van az egyenletrendszernek!

(10) Lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss-eliminációval

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots \dots a_{pn}x_n = b_p \end{matrix}\right\} \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{p1} & & & & a_{pn} \end{pmatrix}_{(p\times n)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}_{(p\times 1)}$$

Megalkothatjuk, az egyenletrendszer kibővített mátrixát; mivel $x_1, \dots, x_n$ „vektor komponensek" ismeretlenek, ezért

$$\Rightarrow \left(\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{matrix}\right)$$

Itt tetszés szerint felcserélhetünk; összeadhatunk, ~~kicserélhetünk~~, kivonhatunk sorokat! (Mivel egyenletekről van szó.)

A cél, hogy diagonális alakra hozzuk a mátrixot, miközben természetesen a végrehajtott műveletek jobb oldalon $\underline{b}$ komponensein is végbemennek!

$$\left(\begin{matrix} a'_{11} & \dots & 0 & & \\ & a'_{22} & 0 & & \\ \vdots & & a'_{nn} & & 0 \\ \vdots & & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} b'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b'_p \end{matrix}\right) \rightarrow \text{Így a következőt kapjuk:}$$

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & 0 \\ & a'_{22} & \vdots \\ \vdots & \ddots & a'_{nn} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a'_{11}x_1 = b'_1 \\ \vdots \\ a'_{nn}x_n = b'_n \end{matrix}$$

Így már egyenként meg tudjuk határozni x értékeit!

De lehetséges, hogy nem tudjuk diagonális alakúra hozni az egyenletrendszert, vagy azt vesszük észre, hogy két azonos sor különböző megoldást ad.

A második esetben végeztünk és kijelenthetjük, hogy nincs megoldás, az elsőben viszont fel kell fedeznünk, hogy végtelen sok megoldás van, mivel ~~egy~~ a lineáris egyenletrendszernek van egy egész altere, ami jó.

(pl.: Két ~~egyenes~~ síkot meghatározó egyenletrendszer metszésvonala meghatároz egy egyenest!)

Ekkor a nem diagonalizálható tagokra, mint változóra kell tekinteni és azszerint paraméterezni az egyenletrendszert!

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & \\ 0 & -1 & 0 & -4 & \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

p

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad x_1 = x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

: origón átmenő egyenesek!

* Inhomogén egyenletrendszer esetén ez ugyanígy valósul meg, kiszem:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad b_1, \dots, b_n \neq 0$$

Az eredeti vektor felbontható egy $\underline{x} = \underline{a} + p\underline{e}$ vektorokra. Ahol $\underline{a}$ egy egyedi vektor, míg $p\underline{e}$ a homogén egyenlet megoldása.

$$\underline{\underline{A}}(p\underline{e} + \underline{a}) = p\underline{\underline{A}}\,\underline{e} + \underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \underline{b}$$

inhomogén egyenletrendszer megoldása

homogén egyenletrendszer megoldásai

ha $|\omega| \ll 1$ akkor

$$e^{\omega B} \approx 1+\omega B$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(\omega)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\omega B}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (E+\omega B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \omega B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$x' \approx x + y\omega \qquad y' \approx x\omega + y$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y\omega \\ x\omega+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

A két kifejezés ekvivalens, tehát

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \omega B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Ily módon megkaptuk azt a B operátort, amelynek segítségével kifejezhetjük a Lorentz-transzformációt exponenciális alakban. Ezek szerint van olyan B, amely kielégíti az $A(\omega) = e^{\omega B}$ egyenletet. A bizonyítás egyetlen szépséghibája az volt, hogy feltételeztük azt, hogy a B együtthatója kicsi. Ezt ügyes fogással küszöbölhetjük ki:

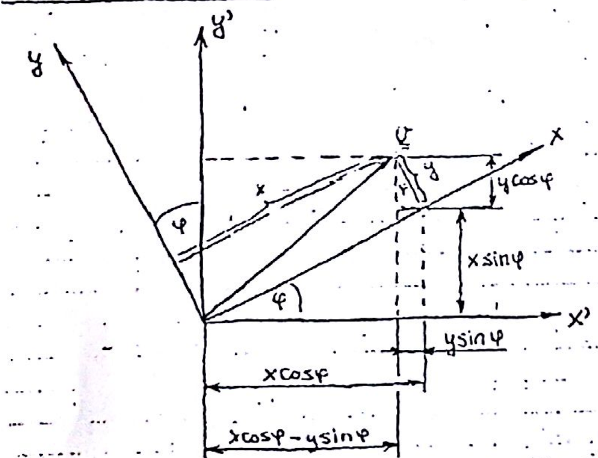
$$A(\omega) = \left[A\left(\tfrac{\omega}{n}\right)\right]^n \qquad e^{\omega B \frac{n}{n}} = \left[e^{\frac{\omega}{n}B}\right]^n$$

Mivel jelen esetben n tetszőleges egész szám $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\omega}{n}B} = 1+\frac{\omega}{n}B$, azaz

$$e^{\omega B} \xleftarrow[\infty]{n} \left(1+\tfrac{\omega}{n}B\right)^n \xrightarrow[\infty]{n} \left[A\left(\tfrac{\omega}{n}\right)\right]^n = A(\omega) \qquad \text{tetszőleges } \omega \text{ esetén}$$

Így tehát tetszőleges ω esetén a Lorentz-transzformáció kifejezhető exponenciális alakban.

A SÍKBELI FORGATÁS:



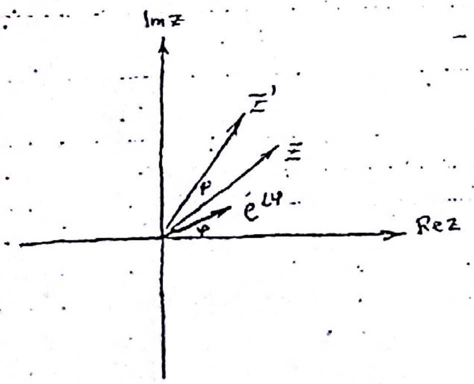
Mik lesznek egy φ szöggel elforditott vektor új koordinátái?

Ennek kiszámításához ne a vektort forgassuk el φ szöggel, hanem a koordinátarendszert −φ szöggel. Végrehajtva a passzív transzformációt a vektor $x'y'$ koordinátarendszerbeli koordinátái meg fognak egyezni azon koordinátákkal, melyeket úgy kapunk, hogy xy koordinátarendszerben φ szöggel forgatnánk el a vektort:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$

$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

Most pedig lássunk egy alternatív levezetést. Legyen z egy komplex szám. A z φ szöggel való elforgatása azt jelenti, hogy z-t $e^{i\varphi}$-nel szorozzuk:



$$z' = ze^{i\varphi} = x'+iy'$$

$$z' = ze^{i\varphi} = (x+iy)e^{i\varphi} = (x+iy)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= \underbrace{(x\cos\varphi - y\sin\varphi)}_{x'} + i\,\underbrace{(x\sin\varphi + y\cos\varphi)}_{y'}$$

tehát

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$

$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

A síkbeli forgatást a következő operátorral fejezhetjük ki,

$$\underline{v}' = F(\varphi)\underline{v}$$

A forgatások kommutatív csoportot alkotnak:

(i) $F(\beta)F(\alpha)\underline{v} = F(\alpha+\beta)\underline{v} = F(\gamma)\underline{v}$

(ii) $[F(\gamma)F(\beta)]F(\alpha) = F(\gamma)[F(\beta)F(\alpha)]$

(iii) a neutrális elem $F(0)$

(iiii) az inverz: $F(\alpha)$ inverze $F(-\alpha)$, $F(\alpha)F(-\alpha) = F(0)$

Az a kérdés, hogy nem lehet-e ezt a transzformációt a könnyebb kezelhetőség kedvéért exponenciális alakban kifejezni? Például ilyen alakban:

$$F(\varphi) = e^{\varphi M} \quad \text{ekkor} \quad F(\alpha)F(\beta) = e^{\alpha M}e^{\beta M} = e^{(\alpha+\beta)M}$$

Tegyük fel először az egyszerűség kedvéért azt, hogy $\varphi \sim 0$, azaz az elforgatás szöge igen kicsi, ekkor:

$$\underline{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}$$ mivel $\varphi \sim 0$, ezért $\cos\varphi \sim 1$ és $\sin\varphi \sim \varphi$, ezért.

$$\underline{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y\varphi \\ x\varphi + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y\varphi \\ x\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Mivel $\varphi \sim 0$, így $e^{\varphi M} \sim (1+\varphi M)$, tehát

$\underline{v}' = (1+\varphi M)\underline{v}$ és az előbbiek szerint $\underline{v}' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\underline{v} + \varphi M\underline{v} = \underline{v} + \varphi\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

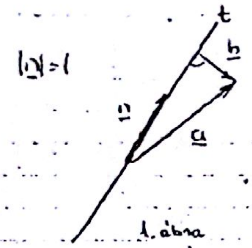
$$\varphi M\underline{v} = \varphi\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}}$$ ez egy lineáris operátor

Mit tesz az M^2 operátor?

$$M^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\left[M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = M\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

TÉRBELI FORGATÁS: Legyen az elforgatás tengelye t, s e tengelyen levő egységnyi hosszúságú vektor $\underline{n}$. Az $\underline{a}$ vektort e tengely körül φ szöggel forgatjuk el. Mi lesz a forgatási operátor mátrixa?

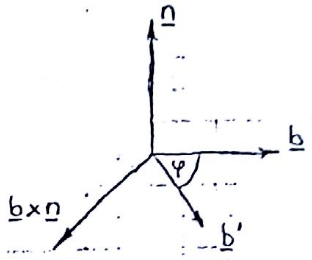


1. ábra

Fejezzük ki a $\underline{b}$ vektort:

$$(1)\quad \underline{n}(\underline{a}\underline{n}) + \underline{b} = \underline{a}$$

$$(1)\quad \underline{b} = \underline{a} - \underline{n}(\underline{a}\underline{n})$$



Próbáljuk meg kifejezni a $\underline{b}'$ vektort. A $\underline{b}'$ vektort nyilvánvalóan ki lehet fejezni a $\underline{b}, \underline{n}$ és $\underline{b}\times\underline{n}$ vektorokkal, hiszen $(\underline{b}, \underline{n}, (\underline{b}\times\underline{n})) \neq 0$, sőt, mi több, ezek a vektorok merőlegesek egymásra, tehát:

$$(2)\quad \underline{b}' = \alpha\underline{b} + \beta\underline{n} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n})$$

Próbáljuk meg meghatározni az α, β és γ együtthatókat.

$\underline{b}' = \alpha\underline{b} + \beta\underline{n} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n}) \;/\cdot\underline{b}$

$\underline{b}'\underline{b} = \alpha\underline{b}\underline{b} + \beta\underline{n}\underline{b} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n})\underline{b}$

Mivel $\underline{b}\perp\underline{n}$ és $\underline{b}\perp(\underline{b}\times\underline{n})$

$\underline{b}'\underline{b} = \alpha\underline{b}\underline{b}$

$b^2\cos\varphi = \alpha b^2$

$(3)\quad \alpha = \cos\varphi$

$\underline{b}' = \alpha\underline{b} + \beta\underline{n} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n}) \;/\cdot\underline{n}$

$\underline{b}'\underline{n} = \alpha\underline{b}\underline{n} + \beta\underline{n}\underline{n} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n})\underline{n}$

Mivel $\underline{b}'\perp\underline{n}$, $\underline{b}\perp\underline{n}$ és $(\underline{b}\times\underline{n})\perp\underline{b}$

$0 = \beta n^2$

$(4)\quad \beta = 0$

$\underline{b}' = \alpha\underline{b} + \beta\underline{n} + \gamma(\underline{b}\times\underline{n}) \;/\cdot(\underline{b}\times\underline{n})$

$\underline{b}'(\underline{b}\times\underline{n}) = \alpha\underline{b}(\underline{b}\times\underline{n}) + \beta\underline{n}(\underline{b}\times\underline{n}) + \gamma(\underline{b}\times\underline{n})^2$

Mivel $\underline{b}\perp(\underline{b}\times\underline{n})$ és $\underline{n}\perp(\underline{b}\times\underline{n})$

$\underline{b}'(\underline{b}\times\underline{n}) = \gamma(\underline{b}\times\underline{n})^2$

$|\underline{b}'|\cdot|\underline{b}\times\underline{n}|\cos(90-\varphi) = \gamma(\underline{b}\times\underline{n})$

$b\cdot b\sin\varphi = \gamma b^2$

$(5)\quad \gamma = \sin\varphi$

Mindezen egyenletek eredményét (2)-be helyettesítve

$$(2)\quad \underline{b}' = \underline{b}\cos\varphi + (\underline{b}\times\underline{n})\sin\varphi$$

Most pedig helyettesítsük be $\underline{b}$ helyére (1)-t.

$$(2)\quad \underline{b}' = [\underline{a} - \underline{n}(\underline{a}\underline{n})]\cos\varphi + [(\underline{a} - \underline{n}(\underline{a}\underline{n}))\times\underline{n}]\sin\varphi$$

A vektoriális szorzat disztributív, tehát $(\underline{e}+\underline{f})\times\underline{g} = \underline{e}\times\underline{g} + \underline{f}\times\underline{g}$, ezért:

$$(2)\quad \underline{b}' = \underline{a}\cos\varphi - \underline{n}(\underline{a}\underline{n})\cos\varphi + (\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi - [(\underline{n}(\underline{a}\underline{n}))\times\underline{n}]\sin\varphi$$

Ám $\underline{n}(\underline{a}\underline{n})$ egy $\underline{n}$ irányú vektor lesz, ezért $[(\underline{n}(\underline{a}\underline{n}))\times\underline{n}] = 0$

$$(2)\quad \underline{b}' = \underline{a}\cos\varphi - \underline{n}(\underline{a}\underline{n})\cos\varphi + (\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi$$

A fentebbi ábrák tanulmányozásából kiderül, hogy az $\underline{a} = \underline{b} + \underline{n}(\underline{a}\underline{n})$-hez hasonló összefüggés érvényes az $\underline{a}'$-re is:

$$(6)\quad \underline{a}' = \underline{b}' + \underline{n}(\underline{a}\underline{n})$$

Helyettesítsünk (6)-ban $\underline{b}'$ helyére (2)-t.

$$(6)\quad \underline{a}' = \underline{a}\cos\varphi - \underline{n}(\underline{a}\underline{n})\cos\varphi + \underline{n}(\underline{a}\underline{n}) + (\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi$$

(6) $\underline{a}' = \underline{a}\cos\varphi + \underline{n}(\underline{a}\underline{n})(1-\cos\varphi) + (\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi$

$$\underline{a}' = \underline{a}\cos\varphi + \underline{n}(\underline{a}\underline{n})(1-\cos\varphi) + (\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $\underline{e}^{(k)}$-val, azaz a k-dik egységvektorral, hogy megkapjuk a k-dik koordinátát:

(7) $a_k' = a_k\cos\varphi + n_k(\underline{a}\underline{n})(1-\cos\varphi) + \underline{e}^{(k)}(\underline{a}\times\underline{n})\sin\varphi$

Tudjuk, hogy $(\underline{a}\times\underline{n})_k = \sum_{lm} \varepsilon_{klm} a_m n_l$, ezt behelyettesítve (7)-be

(7) $a_k' = a_k\cos\varphi + n_k(\underline{a}\underline{n})(1-\cos\varphi) + \sum_{lm} \varepsilon_{klm} a_m n_l \cdot \sin\varphi$

Valamely isteni szikra folytán az a gondolatunk támadt, hogy a jobb oldalon álló összegből ki kellene emelni $\sum_m a_m$-t. Az a_k-t kifejezhetjük a következőképpen:

(8) $a_k = \sum_m \delta_{km} a_m$

Most már csak a középső tagban nincs $\sum_m a_m$, ám ezt könnyen pótolhatjuk, hiszen:

(9) $(\underline{a}\underline{n}) = \sum_m a_m n_m$

Behelyettesítve (8)-t és (9)-t (7)-be:

(7) $a_k' = \cos\varphi \sum_m a_m \delta_{km} + n_k(1-\cos\varphi)\sum_m a_m n_m + \sum_m\sum_l \varepsilon_{klm} a_m n_l \sin\varphi$

(7) $a_k' = \sum_m a_m \left[\delta_{km}\cos\varphi + n_k n_m(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{klm} n_l \sin\varphi\right]$

Legyen

(10) $F_{km} = \delta_{km}\cos\varphi + n_k n_m(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{klm} n_l \sin\varphi$

Ekkor

(7) $a_k' = \sum_m F_{km} a_m$

Írjuk ki az a_k'-kat:

$$a_1' = F_{11}a_1 + F_{12}a_2 + F_{13}a_3$$
$$a_2' = F_{21}a_1 + F_{22}a_2 + F_{23}a_3$$
$$a_3' = F_{31}a_1 + F_{32}a_2 + F_{33}a_3$$

Ez a séma emlékeztet a mátrixszorzásra, s valóban a fenti egyenletrendszer ekvivalens az alábbival:

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}$$

$$F_{km} = \delta_{km}\cos\varphi + n_k n_m(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{klm} n_l \sin\varphi$$

Ellenőrizzük a kapott eredményt. Ha $\underline{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, akkor pont a síkbeli forgatás mátrixát kell visszakapnunk $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$-t.

$$\underline{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$F_{11} = \delta_{11}\cos\varphi + n_1^2(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{1l1} n_l \sin\varphi = \cos\varphi$$

$$F_{12} = \delta_{12}\cos\varphi + n_1 n_2(1-\cos\varphi) + \sum_3 \varepsilon_{132} n_3 \sin\varphi = \varepsilon_{132} n_3 \sin\varphi = -\sin\varphi$$

$$F_{13} = \delta_{13}\cos\varphi + n_1 n_3(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{1l3} n_l \sin\varphi = \varepsilon_{123} n_2 \sin\varphi = 0$$

$$F_{21} = \delta_{21}\cos\varphi + n_2 n_1(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{2l1} n_l \sin\varphi = \varepsilon_{231} n_3 \sin\varphi = \sin\varphi$$

$$F_{22} = \delta_{22}\cos\varphi + n_2 n_2(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{2l2} n_l \sin\varphi = \cos\varphi$$

$$F_{23} = \delta_{23}\cos\varphi + n_2 n_3(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{2l3} n_l \sin\varphi = \varepsilon_{213} n_1 \sin\varphi = 0$$

$$F_{31} = \delta_{31}\cos\varphi + n_3 n_1(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{3l1} n_l \sin\varphi = \varepsilon_{321} n_2 \sin\varphi = 0$$

$$F_{32} = \delta_{32}\cos\varphi + n_3 n_2(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{3l2} n_l \sin\varphi = \varepsilon_{312} n_1 \sin\varphi = 0$$

$$F_{33} = \delta_{23}\cos\varphi + n_3^2(1-\cos\varphi) + \sum_l \varepsilon_{3l3} n_l \sin\varphi = \cos\varphi + (1-\cos\varphi) = 1$$

Tehát

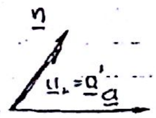
$$\underline{F} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ez pedig megegyezik a síkbeli forgatás mátrixával

A PROJEKCIÓ ÉS A TÜKRÖZÉS MÁTRIXAI

Számítsuk ki először a projekció operátorának mátrix

$$(1)\quad \underline{a}' = \underline{a}_{\parallel} = \underline{n}(\underline{a}\underline{n}) = \underline{P}\underline{a}$$



Az $\underline{a}'$ vektor k-dik komponense:

$$(2)\quad a'_k = (\underline{n}\underline{a})n_k = \left(\sum_l n_l a_l\right) n_k = \sum_l (n_k n_l) a_l$$

Legyen (3) $P_{kl} = n_k n_l$ akkor

$$(2)\quad a'_k = \sum_l P_{kl} a_l.$$

HA A PROJEKCIÓ AZ $\underline{n}$ VEKTORRA TÖRTÉNIK

$$a'_k = \sum_{l=1}^{3} P_{kl} a_l \quad \text{ahol } P_{kl} = n_k n_l$$

Most számítsuk ki gyakorlásképpen az $n = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$ vektorra történő projekció mátrixát:

$$n = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix} \quad n_1 = 1/\sqrt{2} \quad n_2 = 1/\sqrt{2} \quad n_3 = 0$$

$P_{11} = n_1 n_1 = \frac{1}{2}$ $\quad P_{12} = n_1 n_2 = \frac{1}{2}$ $\quad P_{13} = n_1 n_3 = 0$

$P_{21} = n_2 n_1 = \frac{1}{2}$ $\quad P_{22} = n_2 n_2 = \frac{1}{2}$ $\quad P_{23} = n_2 n_3 = 0$

$P_{31} = n_3 n_1 = 0$ $\quad P_{32} = n_3 n_2 = 0$ $\quad P_{33} = n_3 n_3 = 0$

Bizonyos esetekben arra lehet szükségünk, hogy a determináns értéke 0 legyen. Milyen x értékek esetén következik ez be?

Vizsgáljuk az $0 \le x \le 4$ esetet:

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} = 0$$

akkor, ha:

$$\alpha(n+1) = k\pi \qquad \text{ahol } k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{k}{n+1}\pi$$

tehát a zérushelyek: $$X_k = 4\sin^2\left(\frac{k}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

ez, mint az könnyen belátható n db gyököt (különböző gyökökről van szó) jelent.

Sh esetben nincs gyök? Hiszen számláló is nevező csak egy szám lehet 0

EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA

Az egyenletrendszerek megoldásánál használt módszert legegyszerűbb egy példán keresztül bemutatni. Íme egy négy egyenletből álló egyenletrendszer:

(1) $5x + 8y + 3z = 11$
(2) $x + 3y + 2z = 5$
(3) $3x + 2y - z = 1$
(4) $x + y \quad = 1$

Az egyenletre jellemző kibővített mátrix:

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 3 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ezt a mátrixot egyszerűen úgy készítjük, hogy leírjuk egymás alá az azonos ismeretlenhez tartozó együtthatókat – természetesen egy adott egyenlet ismeretleneihez tartozó együtthatók egy sorban találhatók –, és a jobb szélső ~~sorba~~ oszlopba – melyet a jobb áttekinthetőség kedvéért egy függőleges vonallal határolunk el a többitől – az egyenletek jobb oldalára rendezett konstansokat írjuk.

Az egyenletre jellemző kibővített mátrixszal szabad mindazt csinálni, amit egy egyenletrendszerrel: sort szabad szorozni számmal, sort sorhoz hozzá szabad adni, sőt sor számszorosát is szabad hozzáadni sorhoz, a sorokat szabad cserebérélni. Tehát tulajdonképpen ugyanazt végezzük az egyenletre jellemző kibővített mátrix rendezésekor, mint amit amúgy az egyenletekkel tennénk, de a mátrixszal sokkal egyszerűbb számolni, mint az a következőkben kiderül.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 3 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 3 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Az a cél, hogy minél több 0-t gyűjtsünk (később látni fogjuk, hogy miért). Először próbáljunk az első oszlopban minél több 0-t gyűjteni. Értelemszerűen kell maradnia legalább egy nem nulla elemnek is (ha nem, erre esetet lásd később). Cseréljük fel először a sorokat, hogy felülre kerüljön az (11011) sor. Ez lesz az a sor, amelyet kivonogatunk a többiből: vonjuk le az első sor 5-szörösét a másodikból, 3-szorosát a harmadikból, s 1-szeresét az utolsóból. Praktikus, ha abban a sorban, amelyet kivonogatunk 1-es áll azon a helyen, amelyik oszlopban 0-kat akarunk, ekkor ugyanis nem jönnek be törtszámok.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ezután szorozzuk meg a második sort $\frac{1}{3}$-dal, a harmadikat -1-gyel és a negyediket $\frac{1}{2}$-del. Ekkor három azonos sor tűnik fel. Ez azt jelenti, hogy valójában a négyből csak két egyenlet független.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Vonjuk le a harmadik és a negyedik sorból az ~~első~~ másodikat. Ekkor a két utolsó sor csupa 0-kból fog állni, tehát semmilyen információtartalmuk sincsen, tehát nyugodtan elhagyhatjuk őket. Amennyiben olyan sort kaptunk volna, ahol a vonaltól balra csupa 0 áll, jobbra pedig egy nem 0 szám (pl. 000|2), akkor nyilvánvaló ellentmondásról van szó, tehát az egyenletrendszernek nincsen megoldása, és nem is kell folytatni a számolást.

Jelen esetben ellentmondásról szó sincs, viszont csak két egyenlet van és három ismeretlen. Legyen az egyik ismeretlen rögzített paraméter: $z = p$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Ekkor a vonalat eggyel balrább toljuk és az új helyre került számokat -1-gyel szorozzuk. Tulajdonképpen az egyenletek jobb oldalára visszük az újdonsült konstanst.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Vonjuk le az első sorból a másodikat: s íme, célbaértünk. Ugyanis az a cél, hogy a bal oldali részben csak az átlóban álljanak 1-esek, máshol pedig mindenütt 0-k. Ekkor ugyanis az ismeretleneket könnyű kifejezni:

$$x = z - 1 \quad \text{és} \quad y = -z + 2 \qquad \text{ahol } z = p$$

$$x = p - 1, \quad y = 2 - p, \quad z = p$$

Ez tulajdonképpen egy egyenes egyenletének is tekinthető, ha szemléletesek akarunk lenni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ 2-p \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ -p \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

egyenes egyenlete: $\underline{r} = \underline{a} + p\underline{b}$

Példa: Lássunk egy újabb egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} (1)\quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ (2)\quad & 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\ (3)\quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert jellemző kibővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Vonjuk le a második sorból az első háromszorosát, és a harmadikból az első kétszeresét. Ezután vonjuk le a harmadik sorból a másodikat. Ekkor az utolsó sor a következő egyenletet jelenti: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4$ azaz $0 = 4$. Ez nyilvánvaló ellentmondás, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.

T2

És még egy példa:

$$\begin{aligned}
(1)\quad & 3x+2y-3z+4v=1\\
(2)\quad & 2x+3y-2z+3v=2\\
(3)\quad & 4x+2y-3z+2v=3
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszerre jellemző kibővített mátrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & -2 & 3 & 2\\ 4 & 2 & -3 & 2 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2 & 3 & 2\\ 4 & 2 & -3 & 2 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 3 & -3\\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7\end{array}\right) \sim$$

Vonjuk le az első sorból a másodikat. Vonjuk le az első sor kétszeresét a második sorból és négyszeresét a harmadik sorból. Ezután vonjuk le a harmadik sort a másodikból.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 3 & -3\\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 3 & -3\\ 0 & 0 & -5 & 16 & -11\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3\\ 0 & 0 & -5 & -16 & -11\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & -5 & -5 & -5 & -5\\ 0 & -5 & -5 & -15 & -15\\ 0 & 0 & -5 & -16 & -11\end{array}\right) \sim$$

Adjuk hozzá a második sor hatszorosát a harmadik sorhoz. Mivel eggyel több az ismeretlen, mint az egyenlet rögzítsük v-t, legyen $v=t$. Vigyük át a v-hez tartozó értékeket az elválasztó vonal jobb oldalára (ne felejtsünk el szorozni -1-gyel). Kényelmi szempontból szorozzuk meg az első és a második sort öttel.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & -5 & -5 & -5 & -5\\ 0 & -5 & -5 & -15 & -15\\ 0 & 0 & -5 & -16 & -11\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & -5 & -5 & -5 & -5\\ 0 & 5 & 5 & 15 & 15\\ 0 & 0 & 5 & 16 & 11\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & -5 & 0 & 11 & 6\\ 0 & 5 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & 16 & 11\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 5 & 0 & 0 & 10 & 10\\ 0 & 5 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & 16 & 11\end{array}\right)$$

Csökkentsük a mínusz előjelek számát: szorozzuk meg az utolsó két sort -1-gyel. Kezdjük el írtani a jobb oldalon lévő nem nulla elemeket: vonjuk le az utolsó sort az utolsóelőttiből és adjuk hozzá az utolsó sort az elsőhöz. Ezután adjuk hozzá a második sort az elsőhöz. Most már csak az átlóban vannak nem 0 elemek; könnyen leolvashatjuk a megoldást:

$$x=2t+2,\qquad y=-\frac{1}{5}t+\frac{4}{5},\qquad z=\frac{16}{5}t+\frac{11}{5}\qquad \text{valamint } v=t$$

Homogén lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
(1)\quad & 5x+8y+3z=0\\
(2)\quad & x+3y+2z=0\\
(3)\quad & 3x+2y-z=0\\
(4)\quad & x+y=0
\end{aligned}$$

Íme egy homogén lineáris egyenletrendszer. Az ilyen típusú egyenletrendszerekre az a jellemző hogy csak ismeretlenek vannak bennük, azaz ha rendezzük az egyenleteket a jobb oldalon 0-k állnak.

Az egyenleteknek nyilvánvalóan van megoldása: $x=y=z=0$. Ez a triviális megoldás. Ám mi természetesen a nemtriviális megoldásokra vagyunk kíváncsiak. Egy szinte ugyanilyen egyenletrendszert már megoldottunk. Használjuk fel ennek az eredményét; az egyenletrendszerre jellemző mátrix némi átalakítás után:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{array}\right)$$

Legyen z rögzített, azaz $z=p$. Vigyük át a z-hez tartozó együtthatókat a jobboldalra. Ezután vonjuk le az első sorból a másodikat. A keletkező mátrixból már könnyen leolvashatjuk a megoldást:

$$x=p\qquad y=-p\qquad z=p$$

(11) Mátrixinvertálás (négyzetes mátrixra)

Gauss-elimináció során a következő felírást használtuk:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & b_2 \\ \vdots & & \vdots & b_3 \\ a_{n1} & & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

És így oldottuk meg a lin. egyenletrendszert $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlen vektorkomponensekre.

Megfogalmazódik az a kérdés, hogy melyik az az ismeretlen y_1 vektor, ami a $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ vektort adja vissza, ha a mátrixszal balról szorozzuk.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ & \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(n×n-es mátrix n×1-es oszlopvektorok!)

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ & & 0 \\ \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}\right)$$

Ha tovább megyünk:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{2,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ y_{1,n} & y_{2,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ezt addig csináljuk, amíg y_n vektorokból összeáll egy n×n-es mátrix és a jobb oldalon pedig felírtuk végül így az n×n dimenziós <u>1-es</u>ég mátrixot

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots \\ \vdots & \\ \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

A jelölését, alkalmazva:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & \cdots & 1 & \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots 1 \end{array}\right)$$

Megoldjuk az a feladatot, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak csak a főátlójában legyen nem nulla, miközben a megengedett lépéseket a jobb oldalon is végrehajtjuk.

Végül:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11}^* & \cdots & 0 & c_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn}^* & & \cdots & c_{nn} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & y_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & & \cdots & y_{nn} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\phantom{y_{11} \cdots y_{nn}}}_{\underline{\underline{y}}}$$

Megkapjuk jobb oldalon a keresett $\underline{\underline{y}}$ mátrixot, amire igaz, hogy: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{y}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$!

Természetesen az eljárás előtt meg kell vizsgálnunk, hogy az adott $\underline{\underline{A}}$ mátrix invertálható-e. Ha az, akkor a mátrixból képzett determináns értéke nem lehet nulla!

$$\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}) = \underbrace{\det(\underline{\underline{I}})}_{1} = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\boxed{\frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} = \det \underline{\underline{A}}^{-1}}$$

Ha $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, akkor $\exists$ ~~deter-mináns~~ ~~$\underline{\underline{B}}$ az inverz mátrixhoz és~~ az inverz!

(12) Bázistranszformáció

(ortogonális bázistranszformáció esetén!)

dim $V = 3$

$\vec a, \vec b, \vec c$ bázisvektoraim vannak. Adott $\vec v$ vektor előáll a bázisvektoraim lineárkombinációjaként.

$$\boxed{\vec v = \alpha \vec a + \beta \vec b + \gamma \vec c}$$

Bevezetek $\vec a, \vec b, \vec c$ vektorokhoz tartozó $\vec A, \vec B, \vec C$ reciprokvektorokat, amelyek a következő tulajdonsággal bírnak:

$$\begin{matrix} \vec A \vec a = 1 & \vec B \vec a = 0 & \vec C \vec a = 0 \\ \vec A \vec b = 0 & \vec B \vec b = 1 & \vec C \vec b = 0 \\ \vec A \vec c = 0 & \vec B \vec c = 0 & \vec C \vec c = 1 \end{matrix} \qquad ⚠$$

Így elő tudom állítani $\vec a, \vec b, \vec c$ és $\vec A, \vec B, \vec C$ vektorok ismeretével α, β, γ együtthatókat

$$\alpha = \vec A \vec v \qquad \beta = \vec B \vec v \quad \text{és} \quad \gamma = \vec C \vec v$$

Viszont a vektoriális szorzás felhasználásával $\vec A, \vec B, \vec C$ reciprok-bázisvektorok triviális módon előállíthatóak $\vec a, \vec b, \vec c$ vektorok segítségével!

$$\vec A = \frac{\vec b \times \vec c}{(\vec a, \vec b, \vec c)} \qquad \vec B = \frac{\vec a \times \vec b}{(\vec a, \vec b, \vec c)} \qquad \vec C = \frac{\vec c \times \vec a}{(\vec a, \vec b, \vec c)}$$

Így beláthatjuk, hogy:

$$\alpha = \frac{\vec v(\vec b \times \vec c)}{(\vec a, \vec b, \vec c)} = \frac{(\vec v, \vec b, \vec c)}{(\vec a, \vec b, \vec c)} \qquad \beta = \frac{(\vec v (\vec a, \vec b)}{(\vec a, \vec b, \vec c)} \qquad \gamma = \frac{(\vec v, \vec c, \vec a)}{(\vec a, \vec b, \vec c)} \qquad ⚠$$

Tudjuk, hogy a vegyes szorzat determinánsként írható fel, konkrét értéke van. Így adott bázison reprezentálva:

$$(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Általánosítva: $\vec B^{(k)} \vec b^{(l)} = \delta_{kl}$ → ortonormált esetben $\vec e^{(k)} \vec e^{(l)} = \delta_{kl}$

reciprok bázisvektorok   bázisvektorok

$$\vec B^{(k)} \vec v = v_k \Rightarrow \text{Így } \sum_k v_k \vec b^{(k)} = \sum_k (\vec B^{(k)} \vec v) \vec b^{(k)} = \underbrace{\sum_k (\vec b^{(k)} \circ \vec B^{(k)})}_{\sum_k \hat P^{(k)} = \hat I} \vec v = \vec v$$

Most tudjuk, hogy projektor operátor az, aminek négyzete önmaga!

$$\exists \left(\vec b^{(k)} \circ \vec B^{(k)}\right)\left(\vec b^{(k)} \circ \vec B^{(k)}\right)\vec v = \left(\vec b^{(k)}\circ \vec B^{(k)}\right)\vec b^{(k)}\left(\vec B^{(k)}\vec v\right) =$$

$$\vec b^{(k)}\left(\vec B^{(k)}\left(\vec b^{(k)}\left(\vec B^{(k)}\vec v\right)\right)\right) = \vec b^{(k)}\left(\vec B^{(k)}\vec v\left(\underbrace{\vec B^{(k)}\vec b^{(k)}}_{\delta_{kk}=1}\right)\right) =$$

$$= \vec b^{(k)}\left(\vec B^{(k)}\vec v\right) = \left(\vec b^{(k)}\circ\vec B^{(k)}\right)\vec v \quad ✓$$

Tehát: $\sum_k \hat P^{(k)} = \hat I$

Most az előbbieket reprezentáljuk ~~$(\vec b^{(k)}\vec B^{(l)} = \delta_{kl}$ bázisban)~~

I) $\underline v = \sum_k v_k \underline b^{(k)}$ II) $\underbrace{\underline B^{(l)}\underline b^{(k)} = \delta_{kl}}$ III) $v_k = \underline B^{(k)}\underline v$

⚠ $\sum_m B^{(l)}_m b^{(k)}_m = \delta_{kl}$: ortogonalitási reláció

IV) $\underbrace{\underline{\underline P}^{(k)} = \underline b^{(k)}\circ\underline B^{(k)}}$ V) $\underbrace{\sum_k \underline{\underline P}^{(k)} = \underline{\underline I}}$

$P^{(k)}_{lm} = b^{(k)}_l B^{(k)}_m$ (diadikus szorzás) $\sum_k P^{(k)}_{lm} = \sum_k b^{(k)}_l B^{(k)}_m = \delta_{lm}$ ⚠ : teljességi reláció

Legyen $\underline{\underline U}$ = a $\underline b^{(k)}$ ~~bázis~~ vektorokból alkotott mátrix.

$\underline{\underline U} = \left(\boxed{\underline b_1}, \boxed{\underline b_2}, b_3 \ldots\right)$ $\underline{\underline V}$ pedig a $\underline B^{(k)}$ reciprokvektorokból alkotott mátrix $\underline{\underline V} = \begin{pmatrix}\boxed{B^{(1)}}\\ \boxed{B^{(2)}}\\ \vdots\end{pmatrix}$

k. oszlopvektor

~~$U_{lk} = b^{(m)}_l$ $V_{mk} = B^{(l)}_m$~~ Ekkor $U_{mk} = b^{(k)}_m$

m. komponense

~~$\sum_m U_{lm}V_{mk} = \sum_m$~~ és $V_{lm} = B^{(l)}_m$

$\sum_m V_{lm}U_{mk} = \delta_{lk} \Rightarrow \underline{\underline V}\,\underline{\underline U} = \underline{\underline I}$ Tehát: $\underline{\underline V} = \underline{\underline U}^{-1}$ (!)

Lényegében ezt mondja ki a teljességi reláció:

~~$\sum_k V_{lm}U_{mk} = \sum_k B^{(l)}_m b^{(k)}_m$~~ $\underline{\underline U}\,\underline{\underline V} = \underline{\underline I} \Rightarrow \sum_k U_{lk}V_{km} = \delta_{lm}$

$\Rightarrow \sum_k b^{(k)}_l B^{(k)}_m = \delta_{lm}$ (!)

Ezeket beláttuk; ha van két bázisom a „térben" és ezekhez meghatározom a

$\{\vec b^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ $\{\vec c^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ hozzájuk tartozó reciprokbázist!

$\{\vec B^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ $\{\vec C^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ Ekkor $\vec B^{(k)}\vec b^{(l)} = \delta_{kl}$; $\vec C^{(k)}\vec c^{(l)} = \delta_{kl}$

és $\vec v$ vektort felbonthatom $\{\vec b^{(k)}\}$-n és $\{\vec c^{(k)}\}$-n is!

$$\Rightarrow \quad \vec v = \sum_k^n v_k \vec b^{(k)} = \sum_l^n v_l' \vec c^{(l)}$$

(ugyanaz a vektor van felbontva különböző bázisokban!)

$$\vec C^{(m)}\vec v = \sum_l^n v_l' \underbrace{\vec C^{(m)}\vec c^{(l)}}_{\delta_{ml}} = v_m'$$

, de ugyanezzel a $\vec C^{(m)}$-el beszorozva;

$$\vec C^{(m)}\vec v = \sum_k^n v_k \vec b^{(k)} = \sum_k v_k \underbrace{\vec C^{(m)}\vec b^{(k)}}_{R_{mk}} = \boxed{\sum_k R_{mk} v_k = v_m'}$$

Formailag ez olyan, mintha egy oszlopvektort szoroznék egy mátrixszal, de fogalmilag mást jelent, mert ez <u>NEM</u> egy operátor reprezentációja.

, ha most $\vec B^{(p)}$-vel szorzok be!

$$\vec B^{(p)}\vec v = \sum_k^n v_k \vec B^{(p)}\vec v^{(k)} = v_p$$

$$\vec B^{(p)}\vec v = \sum_l v_l' \vec B^{(p)}\vec c^{(l)} = \boxed{\sum_l S_{pl} v_l' = v_p}$$

$$v_l' = \sum_k R_{lk} v_k$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_l S_{pl} \sum_k R_{lk} v_k}= v_p$$

$$\sum_k \Big(\underbrace{\sum_l S_{pl} R_{lk}}_{\delta_{pk}}\Big) v_k = v_p$$

$$\delta_{pk} \Rightarrow \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{S}}$$, azaz egymás inverzei!

Tehát $v_l' = \sum_k R_{lk} v_k$ $\quad R_{lk} = \vec C^{(l)}\vec b^{(k)}$

$v_k = \sum_l S_{kl} v_l'$ $\quad S_{kl} = \vec B^{(k)}\vec c^{(l)}$

Speciális esetben azaz ortonormált bázisok esetén.

$$\Rightarrow \quad \vec{b}^{(k)} \vec{b}^{(l)} = \delta_{kl} \quad \text{és} \quad \vec{c}^{(k)} \vec{c}^{(l)} = \delta_{kl}$$

$$v'_l = \sum_k R_{lk} v_k \,, \text{ ahol } \quad \boxed{R_{lk} = \vec{c}^{(l)} \vec{b}^{(k)}}$$

$$v_k = \sum_l S_{kl} v'_l \,, \text{ ahol } \quad \boxed{S_{kl} = \vec{c}^{(k)} \vec{c}^{(l)}}$$

vagyis $S_{kl} = \tilde{R}_{lk}$ 4/k

(13) Az operátorok mátrixának transzformációja ortogonális bázistranszformáció esetén, Tenzorok

Ortonormált bázison a különböző bázison reprezentált azonos vektor komponensei egy forgatásmátrixxal vihetőek át egyikből a másikba.

$$v_l' = \sum_k R_{lk} v_k \qquad R_{lk} = \vec{c}^{(l)} \vec{b}^{(k)}$$

$$v_k = \sum_l S_{kl} v_l' \qquad S_{kl} = \vec{b}^{(k)} \vec{c}^{(l)}$$

$$\underline{\underline{S}} = \tilde{\underline{\underline{R}}}$$

, ahol $\vec{b}^{(k)} \vec{b}^{(l)} = \delta_{kl}$ és $\vec{c}^{(k)} \vec{c}^{(l)} = \delta_{kl}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{R}}\,\tilde{\underline{\underline{R}}} = \underline{\underline{I}}$: ortogonális mátrixok tulajdonsága az, hogy transzponáltjuk megegyezik az inverzükkel.

Ez egy passzív transzformáció: forgatás.

Ha veszünk egy $\hat{A}$ operátort és egy vektort: $\vec{u} = \hat{A}\vec{v}$, akkor ezeket reprezentálhatjuk különböző bázison:

$\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$ és $\underline{u}' = \underline{\underline{A}}'\underline{v}'$, de tudjuk, hogy:

$$\underline{v}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{v} \quad \text{és} \quad \underline{v} = \underline{\underline{S}}\,\underline{v}'$$

$\Rightarrow \quad \underline{u}' = \underline{\underline{A}}'(\underline{\underline{R}}\,\underline{v})$ és $\underline{u}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{u} = \underline{\underline{R}}(\underline{\underline{A}}\,\underline{v}) = (\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}})\underline{v} = (\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}})\underline{\underline{S}}\,\underline{v}'$

$\underline{u}' = (\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}})\underline{v}' = \underline{\underline{A}}'\underline{v}' \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}}'}$; ami ortonormált bázison: $\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{A}}'$ (ez egy ekvivalencia reláció*, mivel reflexív, tranzitív és szimmetrikus)

* Reflexív: $\exists \underline{\underline{C}} \quad \underline{\underline{A}}' \sim \underline{\underline{A}} \rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}} \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{I}}^{-1}$

Szimmetrikus: $\underline{\underline{A}}' \sim \underline{\underline{A}} \rightarrow \underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{A}}' \qquad \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}^{-1}$

$$\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{C}} = \underbrace{(\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{C}})}_{\underline{\underline{I}}}\underline{\underline{A}}\underbrace{(\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{C}})}_{\underline{\underline{I}}}$$

Tranzitív: $\underline{\underline{A}}' \sim \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{A}}'' \sim \underline{\underline{A}}' \rightarrow \underline{\underline{A}}'' \sim \underline{\underline{A}}$

$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}^{-1} \quad \underline{\underline{A}}'' = \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{A}}'\underline{\underline{D}}^{-1}$

$\underline{\underline{A}}'' = \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}^{-1})\underline{\underline{D}}^{-1} \rightarrow \underline{\underline{A}}'' = (\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{C}})\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{D}}^{-1} \rightarrow$ Mivel: $(\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{C}})^{-1} = \underline{\underline{C}}^{-1}\underline{\underline{D}}^{-1}$

Az eltranszformált operátorok mátrixainak spurja és determinánsa is azonos.

$$\det \underline{\underline{A}}' = \det(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}) = \det R \det A \frac{1}{\det R}$$

$$Sp(\underline{\underline{A}}') = Sp(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}) = Sp(\underline{\underline{R}}^{-1}\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}) = Sp A$$

A bázisok matematikailag ekvivalensek.

$\underline{v}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{v}$ $\quad \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\tilde{R}}}$ $\quad \alpha' = \alpha$ $\quad$ legyen a bázis ortogonális.

$$v_k' = \sum_l R_{kl} v_l$$

$$A_{kl}' = \sum_p \sum_q R_{kp} A_{pq} \tilde{R}_{ql} = \sum_p \sum_q R_{kp} R_{lq} A_{pq}$$

Ennek analógiájára:

erek tenzorok(!)

$$T_{klm}' = \sum_p \sum_q \sum_s R_{kp} R_{lq} R_{ms} T_{pqs}$$

$$N_{klmn}' = \sum_p \sum_q \sum_s \sum_t R_{kp} R_{lq} R_{ms} R_{nt} N_{pqst}$$

Tenzor (sokindexes mennyiség) úgy transzformálódik mint a vektorkomponensek forgatáskor!

A tenzor indexei nem függnek attól, hogy hány dimenziós a tér.

(14) Lineáris transzformációk sajátérték problémája
(definíciók, tételek, alkalmazások)

$\vec{v} \in V$, $\hat{A}: V \to V$ $\vec{v} \mapsto \vec{u} = \hat{A}\vec{v}$

a probléma a következő: adott $\hat{A}$ operátor esetén létezik-e

$$\left.\begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C} \\ \text{és} \\ \vec{v} \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\hat{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}}$$

λ - az operátor (/mátrix) sajátértéke ⚠

$\vec{v}$ - " - sajátvektora

Reprezentálva: $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v} \to \underline{\underline{A}}\,\underline{v} - \lambda\underline{v} = 0 \to (\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}})\,\underline{v} = 0$

$\Leftrightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}) = \det\underline{\underline{B}} \stackrel{!}{=} 0$ mivel az egyenlet nem triviális megoldását keressük. A $\vec{0}$ nem tekintjük a mátrix sajátvektorának.

$\underline{\underline{B}}(\lambda) \to \det(\underline{\underline{B}}(\lambda)) = \boxed{f(\lambda)}$

Ezt nevezzük karakterisztikus polinomnak, ami λ n-ed fokú polinomja.

polinomnak.

* Tétel: A karakterisztikus polinom az operátor jellemzője, nem az adott mátrixé!

Mivel a nem triviális megoldását keresem az egyenletrendszernek, ezért $\boxed{f(\lambda) \stackrel{!}{=} 0}$ karakterisztikus egyenlet gyökeit keresem.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (az algebra alaptételéből léteznek)

* $\hat{A} \to \underline{\underline{A}}$, $\hat{A} \to \underline{\underline{A}}'$

$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}}$ $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}$

$\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{A}}' - \lambda\underline{\underline{I}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1} - \lambda\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}})\underline{\underline{R}}^{-1}$

$\Rightarrow \underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{R}}^{-1}$

→ és azt tudjuk, hogy:

$$\boxed{\det\underline{\underline{B}} = \det\underline{\underline{B}}'}$$

(2x2) -mátrixra:

$$\boxed{f(\lambda) = \lambda^2 - Sp(\underline{\underline{A}})\lambda + \det\underline{\underline{A}}}$$

(3x3) -as mátrixra:

$$\boxed{f(\lambda) = \lambda^3 - (Sp\,\underline{\underline{A}})\lambda^2 + (Sp\,\mathrm{adj}\,\underline{\underline{A}})\lambda - \det\underline{\underline{A}}}$$

spúrja az algebrai adjungáltnak is bázisinvariáns! $Sp(\mathrm{adj}\,\underline{\underline{A}})$

Áll. Ha egy mátrix egyik sajátértéke 0 akkor $\det \underline{\underline{A}} = 0$!

Tétel: Szimmetrikus mátrix sajátvektorai merőlegesek egymásra.

$$\underline{\underline{A}} = \tilde{\underline{\underline{A}}} \Leftrightarrow A_{kl} = A_{lk}$$

I) $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}$ $\quad \sum_k A_{lk} v_k = \lambda_1 v_l$ $\qquad$ II) $\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda_2 \underline{u}$ $\quad \sum_k A_{lk} u_k = \lambda_2 u_l$

$\sum_l u_l \,/\,$ $\sum_l u_l \sum_k A_{lk} v_k = \sum_l \lambda_1 u_l v_l$ $\qquad$ $\sum_l v_l \,/\,$ $\sum_l v_l \sum_k A_{lk} u_k = \sum_l \lambda_2 u_l v_l$

I) $\sum_l \sum_k A_{lk} u_l v_k = \lambda_1 (\underline{u}\,\underline{v})$ $\qquad$ II) $\underbrace{\sum_l \sum_k A_{lk} v_l u_k}$ $= \lambda_2 (\underline{u}\,\underline{v})$

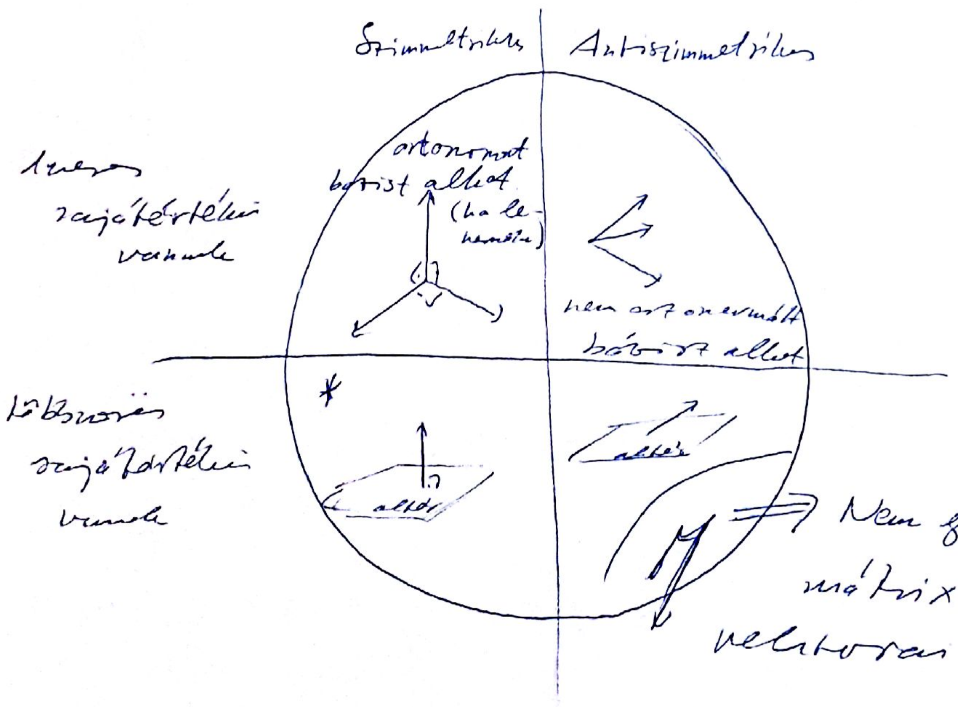
I) − II) $\qquad \cancel{\sum_l \sum_k A_{lk} u_l}$ $\qquad \left(\sum_k A_{lk} u_k\right) \sum_l v_l = \left(\sum_l A_{kl} u_l\right) \sum_k v_k$

$$\sum_l \sum_k \underbrace{(A_{lk} - A_{kl})}_{=0} u_l v_k = (\lambda_1 - \lambda_2)(\underline{u}\,\underline{v})$$

$= 0$; mivel a mátrix szimmetrikus (!)

$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\underline{u}\,\underline{v})$ → Ez képezi a mátrixok teljes ortonormált bázisát.

Áll.: Szimmetrikus mátrix sajátértékei valósak!



⇒ Nem egyszerű struktúrájú mátrixok, melyek sajátvektorai $\underline{\underline{\text{nem}}}$ alkotnak bázist.

* A többszörös sajátértékkel rendelkező mátrixok, megfelelő sajátvektorai bázist határoznak meg a következőképpen nem találhatjuk meg, hogy egy egész dimenziós altere van, amelyben végtelen sok sajátvektort találunk.

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \qquad \underline{v}^{(1)} ; \underline{v}^{(2)}$

$$\underline{v} = \alpha \underline{v}^{(1)} + \beta \underline{v}^{(2)}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v} = \alpha(\underline{\underline{A}}\,\underline{v}^{(1)}) + \beta(\underline{\underline{A}}\,\underline{v}^{(2)}) = \alpha(\lambda \underline{v}^{(1)}) + \beta(\lambda \underline{v}^{(2)}) =$$

$$= \lambda \left(\underbrace{\alpha \underline{v}^{(1)} + \beta \underline{v}^{(2)}} \right)$$

$\Rightarrow$ Ez is sajátvektora $\underline{\underline{A}}$-nak! Alteret alkotnak.

~~Állít.~~ Tétel Egy mátrix jobb és bal oldali sajátvektorai biortogonális vektorrendszert (reciprokbázist) alkotnak!

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{u}^{(k)} = \lambda_k \underline{u}^{(k)} \qquad \square \,|\, = \cdot \,|$$

$$\underline{v}^{(k)} \underline{\underline{A}} = \mu_k \underline{v}^{(k)} \qquad \text{—}\square = \cdot \text{—}$$

$$\sum_m v_m A_{ml} = \mu v_m$$, de tudjuk, hogy bármely mátrixra igaz, hogy $A_{ml} = (\tilde{A})_{lm}$ (!)

$$\Rightarrow \sum_m \tilde{A}_{lm} v_m = \mu v_m \Leftrightarrow \underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{v} = \mu_\ell \underline{v}^{(\ell)}$$

$\underline{v}^{(\ell)} / \ \underline{\underline{A}}\,\underline{u}^{(k)} = \lambda_k \underline{u}^{(k)}$ és $\underline{v}^{(\ell)} \underline{\underline{A}} = \lambda_\ell \underline{v}^{(\ell)} \ / \underline{u}^{(k)}$

I) $\underline{v}^{(\ell)} \underline{\underline{A}}\,\underline{u}^{(k)} = \underbrace{\underline{v}^{(\ell)} \lambda_k \underline{u}^{(k)}}_{\lambda_k \underline{v}^{(\ell)} \underline{u}^{(k)}}$ II) $\underline{v}^{(\ell)} \underline{\underline{A}}\,\underline{u}^{(k)} = \lambda_\ell \underline{v}^{(\ell)} \underline{u}^{(k)}$

I) − II) : $0 = \underbrace{(\lambda_k - \lambda_\ell)}_{\text{különbözőek}: \neq 0} \boxed{\underline{v}^{(\ell)} \underline{u}^{(k)}} \rightarrow \underline{v}^{(\ell)}$ és $\underline{u}^{(k)}$ megfelelő megválasztásával elérhető, hogy $\underline{v}^{(\ell)} \underline{u}^{(k)} = \delta_{lk}$!

Scanned by CamScanner

Az előbbiekből következik, hogy ha a mátrix szimmetrikus, akkor a jobb és bal oldali sajátvektorai egybeesnek! Ekkor a lenormált sajátvektorok önmagukban ortonormált bázist alkotnak.

Továbblépve: $\underline{v}^{(k)}\underline{u}^{(l)} = \delta_{kl}$ és tudjuk, hogy az adott bázisvektorok és

reciprokbázisvektorok diadikus szorzata projektor:

$$\underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(k)} \quad , \quad \underline{\underline{B}} = \sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)}$$

$$\underline{\underline{B}}\,\underline{u}^{(l)} = \sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)} \underline{u}^{(l)} = \sum_k \lambda_k \underline{u}^{(k)} \underbrace{\left(\underline{v}^{(k)}\underline{u}^{(l)}\right)}_{\delta_{kl}} = \lambda_l \underline{u}^{(l)}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)} \quad , \text{ahol} \quad \underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(k)}$$

A mátrix projektorfelbontása! $\forall$ négyzetes mátrixra igaz, amelynek sajátvektorai bázist alkotnak.

Tétel: $\underline{\underline{A}}^n = \sum_k \lambda_k^n \underline{\underline{P}}^{(k)}$ (Végső soron triviális, kisrea *)

Ebből következik, hogy a „mátrixot" sorba lehet fejteni, azaz van(!) polinomja bizonyos feltételek mellett pedig mátrix függvényeket is értelmezünk.

$$* \quad \underline{\underline{A}} = \sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)} \rightarrow \underline{\underline{A}}^2 = \left(\sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)}\right)\left(\sum_l \lambda_l \underline{\underline{P}}^{(l)}\right) = \sum_k \sum_l \lambda_k \lambda_l \underline{\underline{P}}^{(k)}\underline{\underline{P}}^{(l)} =$$

$$= \sum_k \left(\sum_l \lambda_l \delta_{kl}\right) \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)} = \boxed{\sum_k \lambda_k^2 \underline{\underline{P}}^{(k)}}$$

Cayley–Hamilton-tétel: Ha $p(\lambda_k) = f(\lambda_k) = 0$! $\Rightarrow$ $f(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}}$

(Minden négyzetes mátrix kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét) Minden négyzetes mátrixra igaz!

Ha a hatványsornak van határértéke, akkor

$$p(\lambda_k) \rightarrow f(\lambda_k) \; (!)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{A}}) = \sum_k F(\lambda_k)\, \underline{\underline{P}}^{(k)}} \quad \text{Mátrix-függvények alaptétele.}$$

Akkor értelmezhetünk vele mátrixfv. , ha az összes sajátértéke értelmezhető fv.-ünk van!

Mátrix inverze: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\lambda_k} \underline{\underline{P}}^{(k)}$; ~~[illegible]~~ , ha $\exists k \in \mathbb{N}$, hogy $\lambda_k = 0 \rightarrow$ akkor nincs inverz.

Főtengely transzformáció:

$$\underline{\underline{A}} = \sum_k \lambda_k (\underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(k)}) \rightarrow A_{lm} = \sum_k \lambda_k u_l^{(k)} v_m^{(k)} = \sum_k \sum_s \lambda_k u_l^{(k)} \delta_{ks} v_m^{(s)}$$

$$v_m^{(k)} = \sum_s \delta_{ks} v_m^{(s)}$$

$$A_{lm} = \sum_k \sum_s u_l^{(k)} (\lambda_k \delta_{ks}) v_m^{(s)} = \underbrace{\sum_k \sum_s U_{lk} (\Lambda_{ks}) V_{sm}}_{\cancel{}}$$

$$\Lambda_{ks} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad U_{lk} = \begin{pmatrix} \boxed{u_1} , \boxed{u_2} , \dots \end{pmatrix} \qquad V_{sm} = \begin{pmatrix} \boxed{v_1} \\ \boxed{v_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{U}}$ és $\underline{\underline{V}}$ mátrixok egymás inverzei!

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\Lambda}}} \text{ Főtengelytranszformáció!}$$

(15) Lineáris transzformációk sajátértékeinek és sajátvektorainak
(16) kiszámítása / + Projektorfelbontás

(I) Négyzetes mátrixokkal dolgozunk!

1) Meghatározzuk a karakterisztikus polinomot:

2x2 mátrixra:

$f(\lambda) = \lambda^2 - Sp\underline{\underline{A}}\lambda + \det\underline{\underline{A}}$ (=0 : karakterisztikus egyenlet)

3x3 mátrixra:

$f(\lambda) = \lambda^3 - Sp\underline{\underline{A}}\lambda^2 + \tilde{Sp}\underline{\underline{A}}\lambda - \det\underline{\underline{A}}$ (=0 : karakterisztikus egyenlet)

→ általános esetben meg kell határozni a determinánsát a $\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{B}}$ mátrixnak!

2) Meghatározzuk a sajátértékeket!

→ megoldjuk a karakterisztikus egyenletet..

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \underline{\underline{A}} - \lambda_1\underline{\underline{I}} &\Rightarrow \underline{\underline{B}}_1\underline{v}_1 = 0 \\ \underline{\underline{A}} - \lambda_2\underline{\underline{I}} &\Rightarrow \underline{\underline{B}}_2\underline{v}_1 = 0 \\ &\vdots \\ \underline{\underline{A}} - \lambda_n\underline{\underline{I}} &\Rightarrow \underline{\underline{B}}_n\underline{v}_n = 0 \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$$

Ha ránézésre nem lehet megoldani, akkor Gauss-eliminációval kell megoldani az n db egyenletrendszert!

⇓

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ilyen típusú homogén lin. egyenletrendszereket kell megoldani

3) Transzponáljuk a mátrixot és meghatározzuk a baloldali sajátvektorokat is.

$$\underline{\underline{A}} \rightarrow \tilde{\underline{\underline{A}}} \qquad \begin{aligned} \tilde{\underline{\underline{A}}} - \lambda_1\underline{\underline{I}} &\Rightarrow \underline{\underline{C}}_1\underline{u}_1 = 0 \\ &\vdots \\ \tilde{\underline{\underline{A}}} - \lambda_n\underline{\underline{I}} &\Rightarrow \underline{\underline{C}}_n\underline{u}_n = 0 \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$$

4) A sajátvektoroknak (jobb- és bal oldaliaknak) biortogonális vektorrendszert (~~alkot~~) kell, hogy alkossanak.

$\Rightarrow$ $\underline{u}_k \underline{v}_k$ skalárszorzatokat kell 1-re normálni akkor, hogy elő tudjuk állítani a projektorokat!

$\Rightarrow$ $\underline{u}_l \underline{v}_k = \delta_{lk}$ -nak kell legyen; így ellenőrizhetjük magunkat!

$\rightarrow \underline{u}_k \underline{v}_k = 1 \quad \forall k$ -ra.

5) Meghatározzuk a projektorokat, hiszen tudjuk, hogy

$$\sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{\underline{A}}$$

jobboldali baloldali

$\underline{\underline{P}}^{(1)} = P(\underline{v}_{(1)} \circ \underline{u}_{(1)})$: A lényeg, hogy a ~~baloldali~~ jobboldali kör ~~jobboldali~~ baloldali diadikus szorzat a projektor!

⚠

$$\ldots \Rightarrow \sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{\underline{A}} = \lambda_1 \underline{\underline{P}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{P}}^{(2)} + \ldots + \lambda_n \underline{\underline{P}}^{(n)}$$

Emellett tudjuk, hogy $\sum_k \underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{\underline{I}}$.

(17) Mátrix függvények értelmezése és kiszámítása

Tudjuk, hogy a függvények sorbafejthetőek polinomként. Például $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Ezen analógia alapján értelmezhető a mátrixok függvénye is, hiszen mátrixot hatványozni lehet, lineáris kombinációja értelmezett.

Polinomja x-nek:

$$p(x) = \alpha_0 x^0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$$

Így értelmezhető a mátrix polinomja is!

$$p(\underline{\underline{A}}) = \alpha_0 \underline{\underline{I}} + \alpha_1 \underline{\underline{A}} + \alpha_2 \underline{\underline{A}}^2 + \dots + \alpha_n \underline{\underline{A}}^n$$

* (csak, hogy szabályos legyen a művelet) $\rightarrow \left(\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{A}}^0 = \sum_k \underline{\underline{P}}^{(k)} \right)$

<u>Tétel:</u> $\underline{\underline{A}}^n = \sum_k \lambda_k^n \underline{\underline{P}}^{(k)}$

$\underline{\underline{A}}^1 = \sum_k \lambda_k^1 \underline{\underline{P}}^{(k)}$ ✓

$$\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}} = \left(\sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)}\right)\left(\sum_l \lambda_l \underline{\underline{P}}^{(l)}\right) = \sum_k \sum_l \lambda_l \lambda_k \underbrace{\underline{\underline{P}}^{(k)} \underline{\underline{P}}^{(l)}}_{\delta_{kl} \underline{\underline{P}}^{(k)}}$$

$$= \sum_k \left(\sum_l \lambda_l \delta_{kl}\right) \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)} = \sum_k \lambda_k^2 \underline{\underline{P}}^{(k)} \checkmark$$

$\rightarrow$ A többi hatványra teljes indukcióval belátható.

$$\Rightarrow p(\underline{\underline{A}}) = \alpha_0 \underline{\underline{I}} + \alpha_1 \left(\sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)}\right) + \alpha_2 \left(\sum_k \lambda_k^2 \underline{\underline{P}}^{(k)}\right) + \dots + \alpha_n \left(\sum_k \lambda_k^n \underline{\underline{P}}^{(k)}\right)$$

$\uparrow$ $\sum_k \underline{\underline{P}}^{(k)}$

$$p(\underline{\underline{A}}) = \sum_k \left(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_k + \dots + \alpha_n \lambda_k^n\right) \underline{\underline{P}}^{(k)} = \sum_k p(\lambda_k) \underline{\underline{P}}^{(k)}$$

Speciális esetben:

- $p(\lambda_k)$ végtelen hatványsorba fejtve függvényt ad!

$\Rightarrow f(\lambda_k)$

Cayley - Hamilton -tétel:

$$\text{Ha } p(\lambda_k) = f(\lambda_k) = 0$$

$$\Rightarrow f(\underline{\underline{A}}) = 0$$

$\forall$ négyzetes mátrixra igaz! ($\forall$ négyzetes mátrix kielégíti a saját karakterisztikus egyenletét!)

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{F}(\underline{\underline{A}}) = \sum_k \mathbb{F}(\lambda_k) \cdot \underline{\underline{P}}^{(k)}}$$

sajátértékek függvénye

mátrix függvény

Akkor $\exists\, \mathbb{F}(\underline{\underline{A}})$, ha az összes sajátértékre értelmezve van $\mathbb{F}(\lambda_k)$!

Mátrix inverze:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \underline{\underline{P}}^{(k)}$$

Pl!

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\underline{\underline{A}}\right) = \underline{\underline{B}} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 11 \end{matrix}$$

$$\boxed{\underline{\underline{B}} = \sum_k \sin\left(\frac{\pi}{3}\lambda_k\right) \underline{\underline{P}}^{(k)}}$$

(18) Szimmetrikus operátor mátrixának főtengelytranszformációja

$\underline{\underline{P}}^{(k)} = \underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(k)}$; ahol $\underline{u}$ a jobb oldali, $\underline{v}$ pedig a bal oldali sajátvektor!

$$\Rightarrow \text{Továbbá } \underline{\underline{A}} = \sum_k \lambda_k \underline{\underline{P}}^{(k)} = \sum_k \lambda_k \underline{u}^{(k)} \circ \underline{v}^{(k)}$$

$$: A_{lm} = \sum_k \lambda_k u_l^{(k)} v_m^{(k)}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_s \delta_{ks} v_m^{(s)}$$

$$A_{lm} = \sum_k \lambda_k \sum_s \delta_{ks} v_m^{(s)} u_l^{(k)} = \sum_k \sum_s u_l^{(k)} (\lambda_k \delta_{ks}) v_m^{(s)} = (\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}})_{lm}$$

az s. sajátvektor m. komponense! V_{sm}

U_{lk} : a k. sajátvektor l. eleme!

$$\underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad v_1 \quad} \\ \boxed{\quad v_2 \quad} \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & \boxed{u_2} & \cdots \end{pmatrix}$$

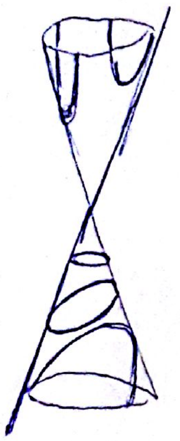
$$\Lambda_{ks} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \boxed{\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}}} \; ; \; \underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{V}}$$

$$\underline{\underline{V}} / \; \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}} \; / \underline{\underline{U}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{\Lambda}}}$$: főtengelytranszformáció!

Ha a mátrix szimmetrikus, akkor jobb és baloldali sajátvektorai egyeznek. Így $\underline{\underline{V}}$ és $\underline{\underline{U}}$ mátrixok egymás transzponáltjai! Ortogonálisak, egy egyszerű forgatást reprezentálnak.

(19) Kúpszeletek



Általános alakja $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$

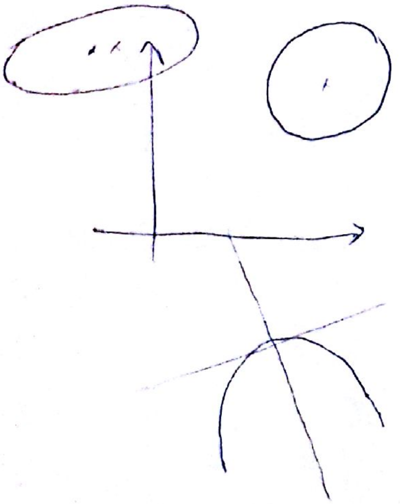
(a, b, c, d, e, f konstansok!)

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cxy = (x\ y)\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ dx + ey = (d\ e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x\ y)\begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d\ e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

$$\boxed{\tilde{\underline{r}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{r} + \tilde{\underline{b}}\,\underline{r} + f = 0}$$

Ahol $\underline{r}$ egy ~~adott pontba~~ futó vektor egy adott bázison



A legegyszerűbb az lenne, ha ezek az alakzatok origó kp-úak lennének, hiszen akkor kézzelfoghatóbb velük bánni, könnyebben meg tudjuk határozni, hogy melyikről van szó.

Tudjuk, hogy ~~síkban~~ a bázistranszformáció síkban egy passzív forgatást jelent (ortonormált bázis esetén).

$$\underline{r}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{r} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\underline{r}}' = \tilde{\underline{r}}\,\underline{\underline{R}}$$

$$\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\tilde{\underline{\underline{R}}}$$

$$\tilde{\underline{r}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{r} = (\tilde{\underline{r}}'\underline{\underline{R}})\underline{\underline{A}}(\tilde{\underline{\underline{R}}}\,\underline{r}') = \tilde{\underline{r}}'(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\tilde{\underline{\underline{R}}})\underline{r}' = \tilde{\underline{r}}'\,\underline{\underline{A}}'\,\underline{r}'$$

Most már főtengelytranszformált!

$$\underline{\tilde{b}}\,\underline{r} \rightarrow (\underline{\tilde{b}}'\underline{\underline{R}})(\underline{\underline{\tilde{R}}}\,\underline{r}') = \underline{\tilde{b}}'\underline{r}'$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\tilde{r}}'\underline{\underline{A}}'\underline{r}' + \underline{\tilde{b}}'\underline{r}' + f = 0}$$

Mindkettő invariáns kifejezés a bázistranszformációra nézve!

$$\Rightarrow (x' \; y')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (b_1' \; b_2')\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

Ezután visszaírjuk az egyenletet, már transzformált alakban:

1) $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + b_1' x' + b_2' y' + f = 0$

(I) T.f.h.: Egyik λ_k sem $=0$! Ekkor:

a) $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

Az 1) kifejezés teljes négyzetté alakítható:

$$\lambda_1 \underbrace{\left(x' - \frac{b_1'}{2\lambda_1}\right)}_{x''}^2 + \lambda_2\left(y' - \frac{b_2'}{2\lambda_2}\right)^2 + g = 0$$

, ahol $g = f - \left(\frac{b_1'}{2\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{b_2'}{\lambda_2 2}\right)^2$

$$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = c} \qquad c > 0$$

$$\left(\frac{x''}{\sqrt{\frac{\lambda_2 c}{\lambda_1}}}\right)^2 + \left(\frac{y''}{\sqrt{\frac{\lambda_1 c}{\lambda_2}}}\right)^2 = 1$$

Ellipszis kanonikus alakja!

Ha $c < 0$, akkor nem léteznek igen pontok a síkon!

Ha $c = 0$, akkor az egy „pontszerű” ellipszis!

Scanned by CamScanner

b) $\cancel{\text{III}}$ Ha $\lambda_1 \lambda_2 \cancel{<} 0$, akkor a kanonikus alak a következő:

$c > 0$

$$\left(\frac{x''}{\sqrt{\frac{\lambda_2 c}{\lambda_1}}}\right)^2 - \left(\frac{y''}{\sqrt{\frac{\lambda_1 c}{\lambda_2}}}\right)^2 = 1$$

A hiperbola kanonikus egyenlete.

$c < 0$

$$\left(\frac{x''}{\sqrt{\frac{\lambda_2 c}{\lambda_1}}}\right)^2 - \left(\frac{y''}{\sqrt{\frac{\lambda_1 c}{\lambda_2}}}\right)^2 = -1$$

Ez is hiperbola, de ez most az, amely az x'' tengelyre szimmetrikus!

$\Rightarrow$ Ha $\varepsilon = 0$, akkor két metsző egyenest kapunk, amelyek az előbbi hiperbolák asszimptotái!

II Ha $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 x'^2 + b_1 x' + b_2 y' + f = 0$

$$\lambda_1 \underbrace{\left(x' - \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)}_{x''}^2 + \underbrace{b_2 y' + g}_{b_2'\underbrace{\left(y' + \frac{g}{b_2'}\right)}_{y''}} = 0$$

$$\lambda_1 x''^2 + b_2' y'' = 0$$

$$\boxed{y'' = -\frac{\lambda_1}{b_2'} x''^2}$$ ~~hip~~ parabola egyenlete!

$\rightarrow$ itt ha $b_2' = 0$, akkor $x''^2 = -\frac{f}{\lambda_1}$ egyenlet két egyenest határoz meg x'', y'' síkon. Ha f is $= 0$, akkor csak 1-et, ami az y'' tengellyel esik meg!

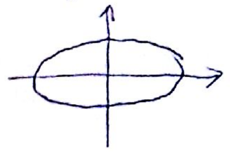
Rövid összefoglalás:

$\longrightarrow$ λ_1, λ_2 ([illegible])

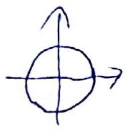
(I) $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$

$\lambda_1 \lambda_2 > 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$\Rightarrow$ ha $b_1 = b_2$



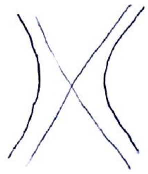
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$

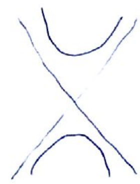
$\emptyset$

$\lambda_1 \lambda_2 < 0$

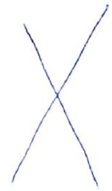
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

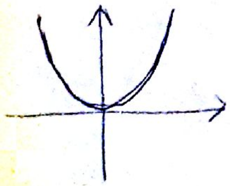


(II) $\lambda_1 \lambda_2 = 0$

$\lambda_2 = 0$

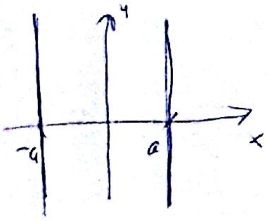
$b_2' \neq 0$

$y = ax^2$

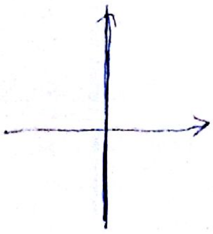


$b_2' = 0$

$x^2 = a^2$



$x^2 = 0$



$x^2 = -a^2$

$\emptyset$

$\Rightarrow$

$\lambda_1 = 0$

– " –

20) Másodrendű felületek

Általános egyenletük a térben a következő:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

Ezt felírva mátrixos, vektoros alakban:

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (g\ h\ i)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + j = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\tilde{r}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{r} + \underline{\tilde{b}}\,\underline{r} + j = 0$$

Ortonormált bázison a bázistranszformáció egy szimpla forgatást jelent, ezért:

$$\underline{r}' = \underline{\underline{R}}\,\underline{r} \Rightarrow \underline{r} = \underline{\underline{\tilde{R}}}\,\underline{r}'$$

$$\underline{\tilde{r}}' = \underline{\tilde{r}}\,\underline{\underline{\tilde{R}}} \rightarrow \underline{\tilde{r}} = \underline{\tilde{r}}'\,\underline{\underline{R}}$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{r}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{r} = \underline{\tilde{r}}'\,\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{\tilde{R}}}\,\underline{r}') = \underline{\tilde{r}}'\left(\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\tilde{R}}}\right)\underline{r}' = \underline{\tilde{r}}'\,\underline{\underline{A}}'\,\underline{r}'$$

Bázistranszformáció ismerős a kifejezés, de mostmár az eredeti $\underline{\underline{A}}$ főtengelytranszformált!

$$\underline{\underline{A}}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b_1' x' + b_2' y' + b_3 z' + j = 0$$

Ezután teljes négyzetté alakítjuk:

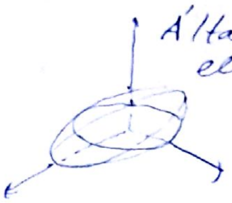
$$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + q = 0}$$

Itt már adott adatok mellett már meg tudjuk határozni azt, hogy milyen felületről van szó.

(I) $\lambda_1\lambda_2 > 0$ $\lambda_1\lambda_3 > 0$ $\lambda_3\lambda_2 > 0$

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + g = 0$$

Általánosítás után: $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} =$ | $1 \Rightarrow$ Általános ellipszoid

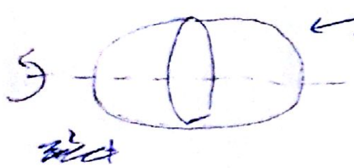


| $0 \Rightarrow$ pontnyi ellipszoid

| <0 $\emptyset$

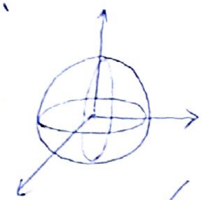
Speciális eset, ha $a=b$: $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

$a>c$ $\quad$ $a<c$



$\Rightarrow$ forgási ellipszoidról van szó!

Legspeciálisabb eset, ha $a=b=c$: gömb $\Rightarrow$



$(x^2+z^2+y^2=c^2)$

(II) $\lambda_1\lambda_2 > 0$ $\lambda_3 < 0$

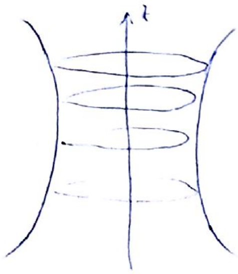
...

$\Rightarrow$ Általánosítás után: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =$ | 1 a)

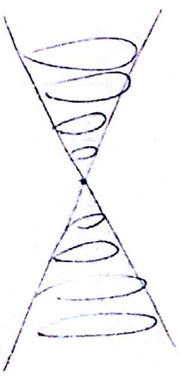
| 0 b)

| -1 c)

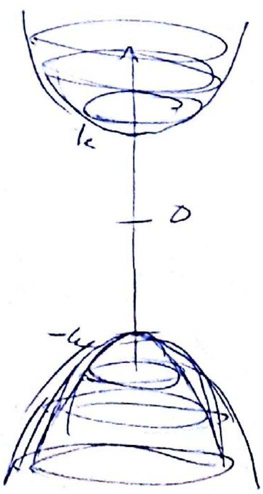
a) Egyköpenyű hiperboloid:



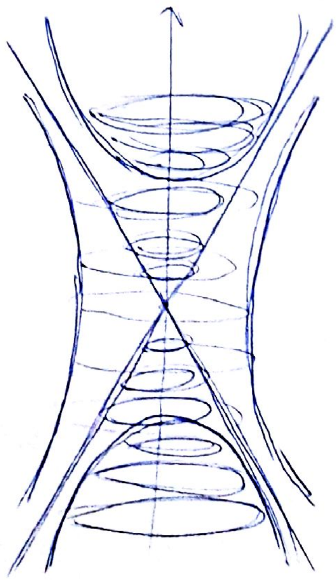
b) kúp



c) kétköpenyű hiperboloid; csak akkor ha $z > c$:

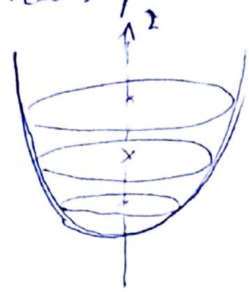


$\Rightarrow$



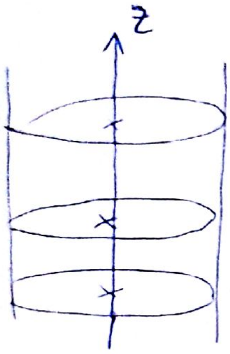
III $\lambda_3 = 0$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 > 0$

a) Elliptikus paraboloid.

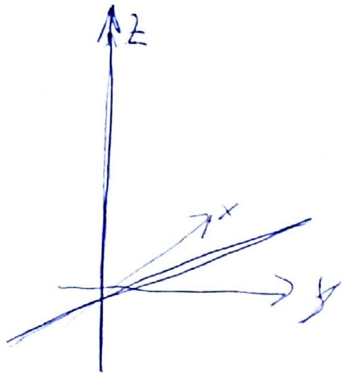


$\Rightarrow$ Ált. alak: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{array}{|ll} z & a) \\ 1 & b) \\ -1 & \emptyset \\ 0 & c) \end{array}$

b) Henger

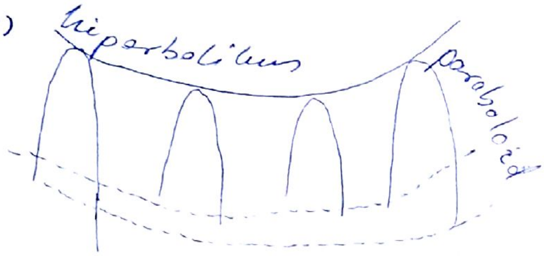


c) Egyenes

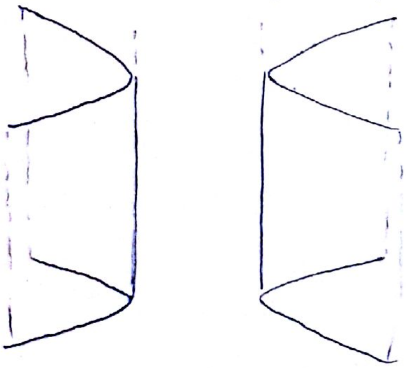


IV $\lambda_3 = 0$ $\quad \lambda_1 \lambda_2 < 0$ $\Rightarrow$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \begin{array}{|ll} z & a) \\ 1 & b) \\ -1 & c) \\ 0 & d) \end{array}$

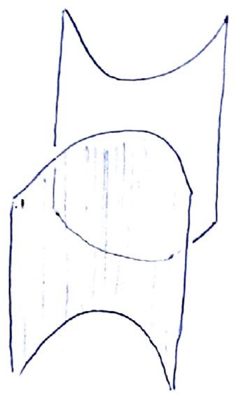
a)



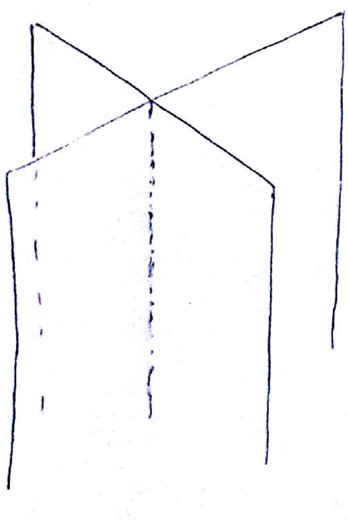
b) hiperbolikus „henger".



c) hiperbolikus „henger"

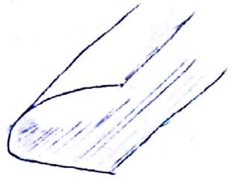


d)



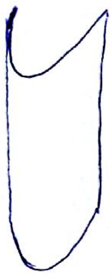
(V) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\quad \lambda_3 \neq 0$

a) $z^2 = a x^{4\cancel{z}}$



c) $z^2 = a^2$: párhuzamos síkok

b) $y = ax^2$



parabolikus

paraboloidok

d) $z^2 = 0$

e) $z^2 < 0$

$\emptyset$

(21) Térgörbék, paraméterezés, ívhossz definíciója és kiszámítása

Alapfogalmak:

mező: helytől függő fv., $\phi(P) \to \phi(\vec{r}) \to \phi(\underline{r}) \to \phi(x,y,z)$

skalár: $M \to S$

vektor: $M \to V$

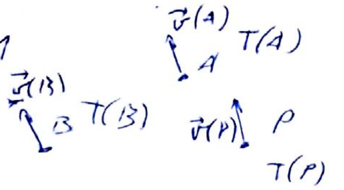
általában ~~vektor~~ skalármező (háromváltozós fv.)

vagy $\underline{v}(P) \to \vec{v}(\vec{r}) \to \underline{v}(\underline{r}) \to \underline{v}(x,y,z)$ vektormező!!

Sokaság jele M; ez lényegében a geometriai tér

a pont eleme ennek

A, B, P ∈ M



→ Hőmérséklet skalármező!

így → vektormező; sebességtér(!)

$$\vec{E}(\vec{r}) \to \underline{E}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} E_1(x,y,z) \\ E_2(x,y,z) \\ E_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Nem a mozgással foglalkozunk, hanem annak pályájával! A differenciálás másképp különbözik, mivel vektorral nem lehet osztani!

[t paraméter]

Van egy $\vec{r}(t)$ fv-ünk; a lényege ennek értelmezése!

(Ez legyen folytonos(!):

$$\lim_{\Delta t \to 0} |\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)| \to 0$$
)

Ha megadtam az $\vec{r}(t)$ fv., akkor meg tudom adni a görbét az időváltozótól függetlenül:

$$\vec{r}(s)$$

A sebesség fv. is értelmezhető $\vec{r}(t)$ segítségével

$$\vec{v}(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\vec{r}(t+\tau) - \vec{r}(t)}{\tau}$$

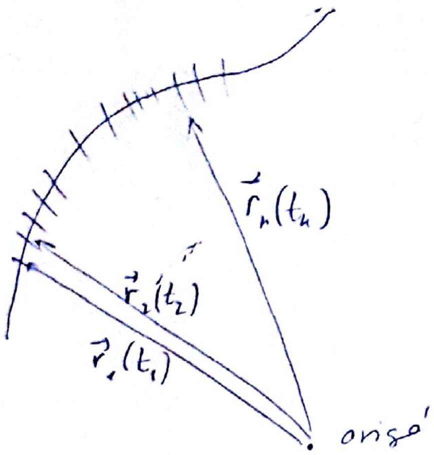
$\vec{r} \to \underline{r}$

$$\Rightarrow v_k(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{r_k(t+\tau) - r(t)}{\tau} = \dot{r}_k(t) = \dot{x}_k(t)$$

(jelölés)

Ezzel visszavezettük a művelet{et} változói fv.-ek differenciálására.

reprezentálva: $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$



A görbét kis részekre felosztva $\Delta\vec{r}_k = \vec{r}(t_{k+1}) - \vec{r}(t_k)$ vektorokat kapok; így a görbét egy törtvonallal pótlom:

$\Rightarrow$ Ezen kis vektorok hossza: $\Delta s_k = |\Delta\vec{r}_k|$

$$\sum_k \Delta s_k = \sum_k |\Delta\vec{r}_k|$$

Ha egyre finomítom a felosztást, akkor ha ez a közelítő összeg tart valahová, azaz véges a határértéke, akkor ezt nevezem a görbe ívhosszának!

$$\lim_{|\Delta s| \to 0} \sum_k \Delta s_k = s = \int ds \quad ⚠$$

Általánosítunk egy újabb közelítést.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \rightarrow \vec{v} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t}$$

$$s = \sum_k \Delta s_k = \sum_k |\Delta\vec{r}_k| = \sum_k |\vec{v}_k \Delta t| = \sum_k |\vec{v}_k(t)| \Delta t =$$

$$\Rightarrow \sum_k |\underline{v}(t)| \Delta t = \sum_k \left| \underbrace{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}} \right| \Delta t$$

$f(t)$ – idő szerinti deriváltak, az időtől függ csak!

Így, ha itt is finomítom a „felbontást":

$$(!) \rightarrow \quad s = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_k \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\, \Delta t \right) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t)}\, dt$$

<u>Paraméterezés</u>: Valamilyen változó szerinti egyenletű felírása egy görbének, síknak, testnek.

→ parabola: $x(t) = t \quad y(t) = at^2 \Rightarrow \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ at^2 \end{pmatrix}$

→ kör: $x(t) = r\cos t \quad y(t) = r\sin t \Rightarrow \underline{r}(t) = r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

→ ellipszis $x(t) = a\cos t \quad y(t) = b\sin t \Rightarrow \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$

pl.: <u>parabola ívhossza</u>:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)|\, dt \qquad \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2at \end{pmatrix} \Rightarrow |\dot{\underline{r}}(t)| = \sqrt{1 + 4a^2t^2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + 4a^2t^2}\, dt$$

<u>kör</u>:

$$s = \int_0^{2\pi} |\dot{\underline{r}}(t)|\, dt \qquad \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix} \qquad \dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\dot{\underline{r}}(t)| = R$$

$$= \int_0^{2\pi} R\, dt = \underline{\underline{2\pi R}}$$

(22) Görbület és torzió

Egy görbére jellemző az ívhossza, amit valamilyen paraméter szerint meghatároztunk, és legyen $s(t)$.

→ Ha ez megvan, elvileg meg tudjuk határozni ennek inverzét $t(s)$ [A paraméter a „görbe" függvényében!]

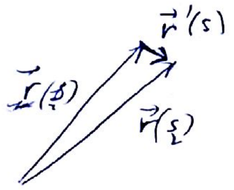
$$\rightarrow \vec r(t) = \vec r(t(s)) = \boxed{\vec r(s)}$$ Ez a görbe egyenletes bejárását eredményezi!

Azonban nem mindegy, hogy honnan paraméterezzük és, hogy milyen egységekben mérjük.

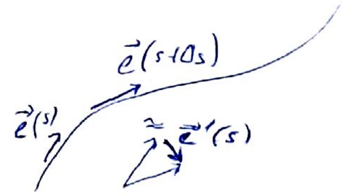
$$\frac{d\vec r}{ds} = \vec r' \quad : \text{ s szerinti deriválás} \qquad \vec r'(s) = \vec e(s)$$

$$|\vec e(s)| = \left|\frac{d\vec r}{ds}\right| = \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta \vec r}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta \vec r|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta s} = \underline{1}$$

Vagyis ez egy <u>érintő</u> egységvektor



$$\frac{d\vec e(s)}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec e(s+\Delta s) - \vec e(s)}{\Delta s}$$



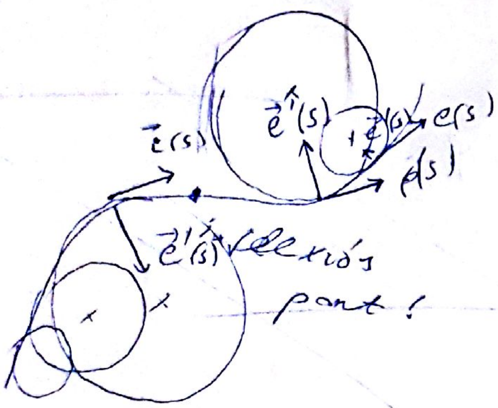
$\Rightarrow \quad \vec e(s)\vec e(s) = 1$: deriváljuk $\Rightarrow \quad 2\vec e'\vec e = 0$

$\Rightarrow \vec e' \perp \vec e$ (!)

Tehát a ~~...~~ gyorsulásvektor merőleges az egységnyi sebességvektorra!

A ~~...~~ gyorsulásvektor hosszát $|\vec e'(s)| = G(s)$ nevezzük görbületnek, ami azt mutatja, hogy mekkora az érintő irányváltozásának a mértéke.

(Mennyire kanyarodunk!)



Adott görbéhez tudunk simuló kört rajzolni, ami adott pontban jól közelíti azt. A simuló kör sugara az inflexiós pontban végtelen, így görbülete 0.

Térben az $\vec e(s)$ és az $\vec e'(s)$ vektorok simulókört, ezzel pedig simuló síkot határoznak meg. $\vec e'(s)$ a simuló kör kp.-jába mutat, $\vec e(s)$ pedig érintővektora a körnek!

$$\vec n(s) = \frac{\vec e'(s)}{\sigma(s)}$$ főnormálisnak nevezzük; lényeges, hogy így $\vec e'(s)$ vektort is egységvektorrá tettük!

$$|\vec n(s)| = 1$$

Bevezetjük $\vec b(s)$ binormális vektort; $\vec b(s) = \vec e(s) \times \vec n(s)$

Ez mindig merőleges a mozgás síkjára!

E három vektort együtt <u>kísérő triédernek</u> nevezzük!

$\vec b'(s)$ vektor megmutatja, hogy mennyi a változás az előző ~~...~~ síkhoz képest; abszolútértéke pedig ennek a változásnak a mértékét jellemzi.

$$|\vec b'(s)| = T(s)$$ Ezt nevezzük torziónak!

<u>Reprezentáljuk:</u> $$\underline r'(s) = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds} = \underline r'(t(s))$$

Itt használjuk fel, hogy $s \to s(t)$; aminek inverze $\boxed{t(s)}$ kompozíció deriváltja!

$$\underline r'(s) = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \underline v(t)\frac{1}{|\underline v|} = \underline v \cdot \frac{1}{v} = \underline e(s) \quad ⚠$$

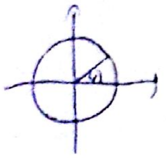
$$\underline{e}'(s) \neq \frac{d}{ds}\frac{\underline{v}}{v} = \underline{e}'(t(s)) = \frac{d\underline{e}}{dt}\cdot\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt}\right)} = \frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\underline{v}}{v}\right) =$$

$$\frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left(\underline{v}\cdot\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v}\left(\left(\frac{d}{dt}\underline{v}\right)\frac{1}{v} + \underline{v}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{v}\right)\right) = \frac{1}{v}\left(\underline{a}\frac{1}{v} + \underline{v}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\cdot\frac{\cancel{2}(\underline{v}\,\underline{a})}{v}\right)$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(\underline{a} - \underline{e}\,v(\underline{a}\underline{e})v\frac{1}{v^2}\right) = \frac{1}{v^2}\left(\underline{a} - (\underline{e}\circ\underline{a})\underline{e}\right) = \boxed{\frac{1}{v^2}\underline{a}_\perp}$$

$$G = |\underline{e}'| = \frac{1}{v^2}|\underline{a}_\perp| = \frac{1}{R}^{*}$$

---

* 

$$\left.\begin{matrix} x(\varphi) = R\cos\varphi \\ y(\varphi) = R\sin\varphi \end{matrix}\right\} \quad \underline{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \dot{\underline{r}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$s = \int |\dot{\underline{r}}(t)|\,dt = \int |\dot{\underline{r}}(\varphi)|\,d\varphi \qquad \left(\cancel{\frac{d\underline{r}}{d\varphi} = \dot{\underline{r}}(\varphi)}\right) \quad \cancel{d\underline{r} = \dot{\underline{r}}(\varphi)\,d\varphi}$$

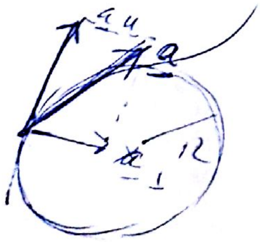
$$s = \int \sqrt{R^2}\,d\varphi = R\varphi \rightarrow \varphi = \frac{s}{R}$$

$$\cancel{\dot{\underline{r}}(\varphi(s)) = \begin{pmatrix} -R\sin(\frac{s}{R}) \\ R\cos(\frac{s}{R}) \end{pmatrix} \rightarrow G(s) = |\dot{\underline{r}}(\varphi(s))|}$$

$$\underline{r}(\varphi(s)) = \begin{pmatrix} R\cos(\frac{s}{R}) \\ R\sin(\frac{s}{R}) \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\underline{r}}(\varphi(s)) = \begin{pmatrix} -R\sin(\frac{s}{R})\frac{1}{R} \\ R\cos(\frac{s}{R})\frac{1}{R} \end{pmatrix} = \underline{e}(s)$$

$$G(s) = |\underline{e}'(\varphi(s))| = \sqrt{\frac{1}{R^2}} = \frac{1}{R}$$ (→ ebből következik, hogy egy simuló kör sugara így mindig kiszámítható!)

$$\Rightarrow \boxed{|\underline{a}_\perp| = \frac{v^2}{R}}$$



⚠

$$\Rightarrow \underline{e}'(s) = \frac{1}{v^2}\left(\underline{a} - \frac{(\underline{v}\,\underline{a})\underline{v}}{v^2}\right) = \frac{1}{v^4}\left(\underline{a}(\underline{v}\,\underline{v}) - (\underline{v}\,\underline{a})\underline{v}\right) = \frac{1}{v^4}\left((\underline{v}\times\underline{a})\times\underline{v}\right)$$

$$G(s) = |\underline{e}'(s)| = \frac{1}{v^4}\overbrace{|\underline{v}\times\underline{a}|}^{|\underline{c}|}|\underline{v}|\sin 90° = \frac{|\underline{c}||\underline{v}|}{v^4} = \frac{|\underline{c}|}{v^3}$$

$$G(s)=\frac{|\underline{v}\times\underline{a}|}{v^3}=\frac{|\dot{\underline{r}}\times\ddot{\underline{r}}|}{|\dot{r}|^3} \quad ⚠$$

Ebből következik, hogy $\underline{h}=\dfrac{\underline{e}'(s)}{G(s)}=\dfrac{\frac{1}{v^4}((\underline{v}\times\underline{a})\times\underline{v})}{\frac{|\underline{v}\times\underline{a}|}{v^3}}=\dfrac{\underline{c}\times\underline{v}}{v|\underline{c}|}$

$$\Rightarrow \underline{b}=\underline{e}\times\underline{h}=\underline{e}\times\frac{(\underline{c}\times\underline{v})}{v|\underline{c}|}=\frac{\underline{v}}{v}\times\frac{\underline{c}\times\underline{v}}{cv}=\frac{1}{cv^2}\Big[\underbrace{\underline{v}\times(\underline{c}\times\underline{v})}_{\underline{c}(\underline{v}\underline{v})-\underline{v}\underbrace{(\underline{c}\underline{v})}_{=0}}\Big]$$

$$\underline{b}=\frac{\underline{c}}{c}=\frac{\underline{v}\times\underline{a}}{|\underline{v}\times\underline{a}|}\Rightarrow \underline{b}'=\frac{d}{ds}\left(\frac{\underline{v}\times\underline{a}}{|\underline{v}\times\underline{a}|}\right)=\frac{db}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{1}{v}\left(\frac{db}{dt}\right)$$

$$\underline{b}'=\frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\underline{v}\times\underline{a}}{|\underline{v}\times\underline{a}|}\right)=\frac{1}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\underline{c}}{|\underline{c}|}\right)=\frac{1}{v}\left(\dot{\underline{c}}\frac{1}{|\underline{c}|}+\underline{c}\left(-\frac{1}{c^2}\right)\frac{\underline{c}\dot{\underline{c}}}{c}\right)=$$

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\dot{\underline{c}}}{c}-\frac{\underline{c}(\underline{c}\dot{\underline{c}})}{c^3}\right)=\frac{1}{v}\left(\frac{\dot{\underline{c}}c^2-\underline{c}(\underline{c}\dot{\underline{c}})}{c^3}\right)=\frac{1}{v}\left(\frac{\dot{\underline{c}}(\underline{c}\underline{c})-\underline{c}(\dot{\underline{c}}\underline{c})}{c^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{vc^3}\left((\underline{c}\times\dot{\underline{c}})\times\underline{c}\right)$$

$$T(s)=|\underline{b}'(s)|=\left|\frac{1}{vc^3}((\underline{c}\times\dot{\underline{c}})\times\underline{c})\right|=\frac{1}{vc^3}|\underline{c}\times\dot{\underline{c}}||\underline{c}|\sin 90^\circ$$

$$=\frac{|\underline{c}\times\dot{\underline{c}}|}{vc^2}=\frac{|(\underline{v}\times\underline{a})\times(\underbrace{\underline{a}\times\underline{a}}_{=0}+\underline{v}\times\dot{\underline{a}})|}{vc^2}=\frac{|\underline{v}(\underline{c}\dot{\underline{a}})-\dot{\underline{a}}\overbrace{(\underline{c}\underline{v})}^{=0}|}{vc^2}$$

$$=\frac{|\underline{v}(\underline{c}\dot{\underline{a}})|}{vc^2}=\frac{\cancel{v}|\underline{c}\dot{\underline{a}}|}{\cancel{v}c^2}=\frac{|(\underline{v}\times\underline{a})\dot{\underline{a}}|}{c^2}=\frac{(\underline{v},\underline{a},\dot{\underline{a}})}{c^2}$$

$$\boxed{T(s)=\frac{(\dot{\underline{r}},\ddot{\underline{r}},\dddot{\underline{r}})}{|\dot{r}\times\ddot{r}|^2}}$$

23 Többváltozós függvények, parciális deriválás, Young-tétel

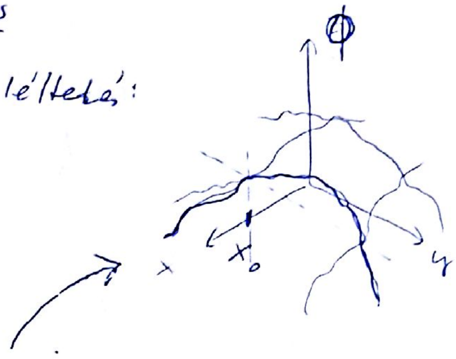
Skalármező: a sokaság minden pontjához rendel egy skalárértéket

→ $\phi(\text{pont})$, $\phi(P)$, $\phi(\vec{r})$, $\boxed{\phi(x,y,z)}$

origót választunk — reprezentáljuk adott bázisban — háromváltozós fv.!

→ parciális deriválás

Szemléltetés:



Adott (rögzített) x/y értéke mellett vizsgálom hogyan változik a függvény a többi változásával.

Legyen most $\phi(x,y)$ kétváltozós

→ Rögzítsük y értékét: y_0 $\quad \phi(x,y_0)=f(x)$

$$f'(x)=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\delta\to 0}\frac{\phi(x+\delta,y_0)-\phi(x,y_0)}{\delta}=\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

: $\phi(x,y)$ fv. x szerint parciális deriváltja!

A Young-tétel azt mondja, hogy $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$, vagyis általánosságban: Ha van egy $\phi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ többváltozós fv.-ünk (~~[illegible]~~ skalármezőnk), akkor $\boxed{\partial_k\partial_l\phi=\partial_l\partial_k\phi}$

Biz legyen $F(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial x}$ és $G(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial y}$

$$F(x,y)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\phi(x+\delta,y_0)-\phi(x,y_0)}{\delta}$$

$$G(x,y)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(x_0,y+\varepsilon)-\phi(x_0,y)}{\varepsilon}$$

A Young-tétel szerint $\frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial x}}_{F(x,y)}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial y}}_{G(x,y)}\Big)$, tehát

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,y) = \lim_{\delta\to 0}\frac{G(x+\delta;y)-G(x;y)}{\delta}$$

$$F(x,y+\varepsilon) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\phi(x+\delta;y+\varepsilon)-\phi(x;y+\varepsilon)}{\delta}$$

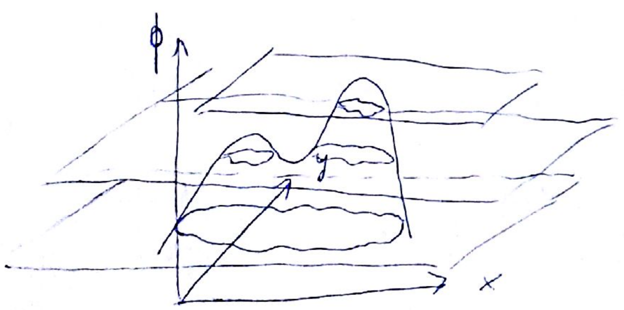
$$G(x+\delta;y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(x+\delta;y+\varepsilon)-\phi(x+\delta;y)}{\varepsilon}$$

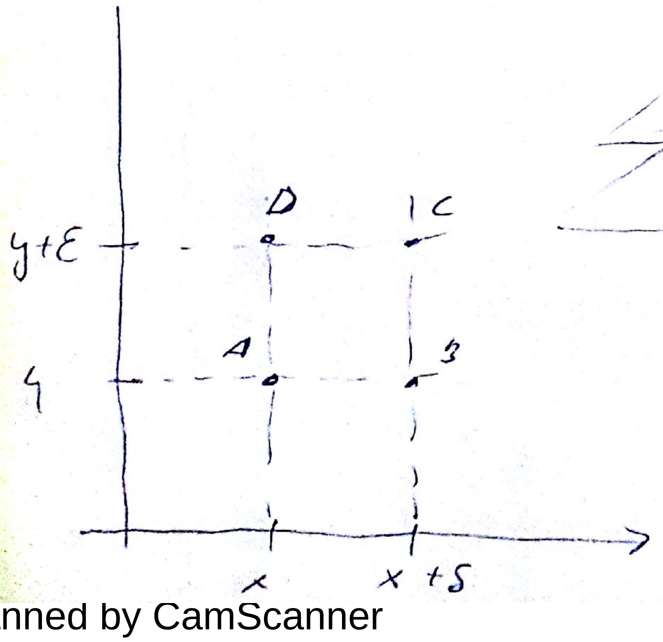
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\overbrace{\phi(x+\delta;y+\varepsilon)}^{\phi(C)}-\overbrace{\phi(x;y+\varepsilon)}^{\phi(D)}}{\delta}-\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\overbrace{\phi(x+\delta;y)}^{\phi(B)}-\overbrace{\phi(x;y)}^{\phi(A)}}{\delta}}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,y) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\overbrace{\phi(x+\delta;y+\varepsilon)}^{\phi(C)}-\overbrace{\phi(x+\delta;y)}^{\phi(B)}}{\varepsilon}-\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\overbrace{\phi(x;y+\varepsilon)}^{\phi(D)}-\overbrace{\phi(x;y)}^{\phi(A)}}{\varepsilon}}{\delta}$$

Ha a limeszek felcserélhetőek, akkor ez a két határérték valóban megegyezik!

(Ehhez az eredeti fv.-nek és a deriváltjainak is folytonosnak kell lenniük!)





Egy „szintvonal" önmagát metszheti, de két különböző nem metszheti egymást!

(Fv. definíciójából köv.)

(24) Skalármezők, potenciálfelületek, derivdlás, gradiens definíciója

Egy skalármezőt vizsgálunk:

→ ismert, hogy mekkora $\phi(\vec{r})$ vagy!

→ egy kis $\vec{\delta}$-al megváltoztatjuk $\vec{r}$ vektort és kiváncsiak vagyunk, hogy ott mekkora a skalármező értéke

$$\lim_{\vec{\delta}\to 0} \cancel{\frac{\phi(\vec{r}+\vec{\delta})-\phi(\vec{r})}{\vec{\delta}}} = \phi'(\vec{r})$$ értelmetlen lenne így venni! (vektorral nem osztunk!)

Ha sorba fejtjük és alkalmazzuk azt a közelítést, hogy csak az első tagig megyünk, akkor:

$$\phi(\vec{r}+\vec{\delta}) \approx \phi(\vec{r}) + \boxed{\vec{g}(\vec{r})}\vec{\delta}$$

kell egy vektor kell, hogy végül skalár értéket kapjunk!

$\vec{g}(\vec{r})$ vektort nevezzük $\phi(\vec{r})$ gradiensének!

jelölés: $\vec{g}(\vec{r}) = \mathrm{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi(\vec{r})$

A ~~gradiens~~ nabla egy diff. operátor; a gradiens ~~függv.~~ derivávlás általánosítása több változós függvényekre. Megadja az skalármező legnagyobb változásának irányát és nagyságát.

Potenciálfelületek a) ponttöltés és tömegpont körül gömbszimmetrikusak

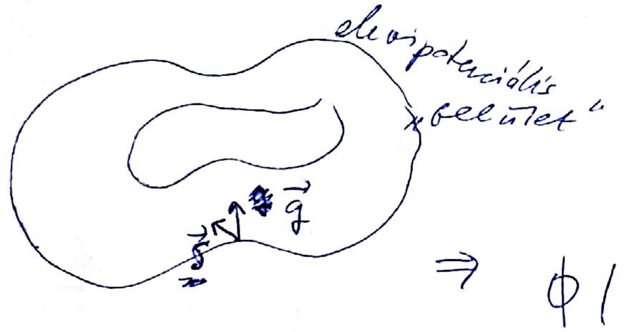
azok a felületek, amelyeknek potenciálja azonos!

(= Ekvipotenciális felületek)

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \to \underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(25) Iránymenti derivált, vektormező menti derivált
(értelme, alkalmazása)

Iránymenti derivált: Adott egy $\underline{n}$ egységvektor és egy $\phi(\underline{r})$ potenciál függvény. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy adott irányú elmozdulás hatására hogyan változik a potenciál.



$\vec{\delta} = \delta\vec{n}$ $\quad \vec{q}$ - gradiense ϕ-nek!

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}+\delta\vec{n}) = \phi(\vec{r}) + \vec{q}(\vec{r})\vec{n}\delta$$

$$\boxed{\lim_{\delta\to 0} \frac{\phi(\vec{r}+\delta\vec{n}) - \phi(\vec{r})}{\delta} = \vec{q}(\vec{r})\vec{n}}$$

Ezt nevezzük iránymenti deriváltnak!

Speciális esetben: ($\underline{V}$)
, ha reprezentáljuk, ha ~~...~~ az $\underline{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; akkor

$$\phi(\underline{r}+\delta\underline{n}) - \phi(\underline{r}) = q(\underline{r})\underline{n}\delta = q_1\delta$$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\phi(\underline{r}+\delta\underline{n}) - \phi(\underline{r})}{\delta} = q_1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\delta\to 0} \frac{\phi(x+\delta,y,z) - \phi(x,y,z)}{\delta} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = q_1$$

$$\boxed{(\text{grad}\,\phi)_k = \partial_k\phi} \left(= \frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)$$

Vagyis ez azt jelenti, hogy egy potenciál fv. gradiensének a komponensei, ortonormált bázisban úgy állnak elő, hogy a potenciál fv. különböző komponensek szerinti parciális deriváltjait vesszük!

-1-

Vektormező menti derivált:

Van egy potenciálfüggvényem $\phi(\vec{r})$ és egy $\vec{v}(\vec{r})$ vektormezőm, amin mentén kíváncsi vagyok a potenciálfüggvény változására.

(A Duna hőmérsékletének változását vizsgálom, miközben sodor magával a folyó!)

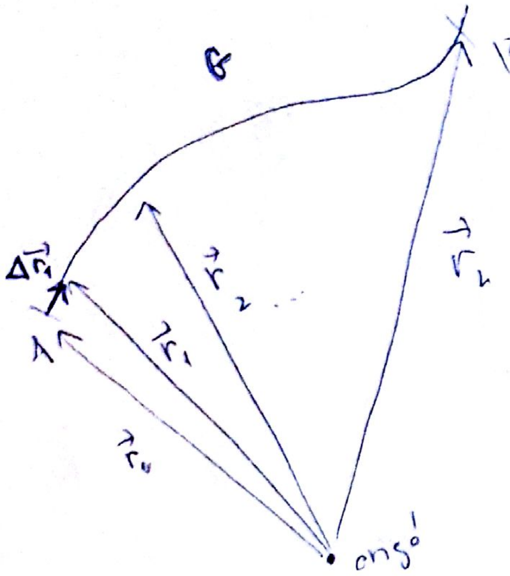
Speciális esetben: $\vec{\delta} = \vec{v}(\vec{r})\Delta t$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\phi(\vec{r}+\vec{v}(\vec{r})\Delta t) - \phi(\vec{r})}{\Delta t} = \vec{v}(\vec{r})\vec{g}(\vec{r})$$

→ Az iránymenti deriválás lényege az, hogy ha van egy potenciálfü.-em / skalármezőm; akkor adott irányba elindulva adott pontból (ahol ismerem $\vec{g}(\vec{r})$-t) meg tudom mondani, hogy hogyan változik a potenciál. Ezzel vizsgálni lehet, hogy egyensúlyi pontban vagyunk-e, és ha igen, akkor milyen típusúban. (szélsőérték a térben, inflexió a térben)

→ A vektormező menti deriváltnál viszont a vektormezőn mentén „mozgok", így annak mentén vagyok kíváncsi a ~~poten~~ skalármező változására.

27 Vonalintegrál, körintegrál, gradiens körintegrálja



Van egy $\phi(\vec r)$ skalármezőnk, valamint egy G görbénk.

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy amíg végighaladunk a görbe mentén, mennyit változik a skalár mező értéke.

$$\phi(\vec r_0) = \phi(A)$$

$$\Delta \vec r_1 = \vec r_1 - \vec r_0$$

I) $\phi(\vec r_1) - \phi(\vec r_0) \approx \vec g(\vec r_0)\Delta\vec r_1$ (Sorbafejtés közelítés!)

II) $\phi(\vec r_2) - \phi(\vec r_1) = \vec g(\vec r_1)\Delta\vec r_2$

⋮

k) $\phi(\vec r_k) - \phi(\vec r_{k-1}) = \vec g(\vec r_{k-1})\Delta\vec r_k$

N) $\phi(\vec r_n) - \phi(\vec r_{n-1}) = \vec g(\vec r_{n-1})\Delta\vec r_n$

$$\phi(\vec r_n) - \phi(\vec r_0) = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \vec g(\vec r_{k-1})\Delta\vec r_k}$$

$$\lim_{|\Delta\vec r_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec g(\vec r_{k-1})\Delta\vec r_k = \int_G \vec g(\vec r)\,d\vec r = \int_{\vec r_0}^{\vec r_n} \vec g(\vec r)\,d\vec r$$

Ha ezt most tetszőleges vektormezőre értelmezem, akkor:

$\vec v(\vec r)$ vonalmenti integrálja:

$$\boxed{\int_G \vec v(\vec r)\,d\vec r}$$

A kiszámítás kulcsa a megfelelő paraméterezési reprezentáció során.

Legyen $\vec r(t)$ az idő fv.-e. Reprezentálva: $\vec r(t) \to \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Alkalmazzuk a következő közelítést!

$$\Rightarrow \qquad \vec r(t) \to \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)}{\Delta t} = \dot{\vec r}(t)$$

$$\frac{\vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec r}{\Delta t}$$

$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec r = \dot{\vec r}(t)\Delta t}$! $\Leftrightarrow$ Ha ezek a mennyiségek infinitezimálisan kicsik.

$$d\vec r = \dot{\vec r}(t)\,dt$$

$$\int_G \vec v(\vec r)\,d\vec r = \int_G \underbrace{\dot{\vec r}(t)\,dt\, \vec v(\vec r(t))}$$

Ahol $\int \vec v(\vec r(t))\, \dot{\vec r}(t)\, dt = \left(\int \vec v(\vec r(t))\right)$ ~~dt~~

[helyettesítéses integrál]

Körintegrál alatt zárt görbe menti vonalintegrált értünk.

Egy ϕ skalármező gradiensének a zárt görbére vett integrálja zérus:

$$\int_{G_1} \vec g(\vec r)\,d\vec r = \phi(B) - \phi(A)$$ [gradiens tétel alapján]

$$\int_{G_2} \vec g(\vec r)\,d\vec r = \phi(A) - \phi(B)$$

$$\int_{G_1} \vec g(\vec r)\,d\vec r + \int_{G_2} \vec g(\vec r)\,d\vec r = 0$$

↳ csak gradiensre 0, lehet nem nulla értékű is!

(28) Gradiens-tétel, rotáció; ennek szemléletes jelentése

Egy $\underline{v} = \text{grad}\,\phi$ vektormező vonalmenti integrálja nem függ a görbétől, csak annak végpontjaitól:

$$\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{v}(\underline{r})d\underline{r} = \int_G \underline{v}(\underline{r})d\underline{r} = \phi(B) - \phi(A) = \phi(\underline{r}_2) - \phi(\underline{r}_1)$$

Ezért $\oint \underline{v}(\underline{r})d\underline{r} \equiv 0$! (Zárt görbére vett integrálja egy skalármező gradiensének.)

Egy skalármezőre igaz a Young-tétel:

$$\boxed{\partial_k \partial_e \phi = \partial_e \partial_k \phi}$$

$\Rightarrow$ Ez azt jelenti, hogy: $\partial_e \phi = (\text{grad}\,\phi)_e = v_e$

$$\partial_k v_e = \partial_e v_k \text{, vagyis } \Rightarrow \partial_k v_e - \partial_e v_k = 0$$

$\partial_1 v_1 - \partial_1 v_1 \overset{\checkmark}{=} 0$ $\quad$ $\partial_2 v_2 - \partial_2 v_2 \overset{\checkmark}{=} 0$ $\quad$ $\partial_3 v_3 - \partial_3 v_3 \overset{\checkmark}{=} 0$

$\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = 0 \Leftrightarrow \cancel{\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 = 0} \rightarrow \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 = 0$

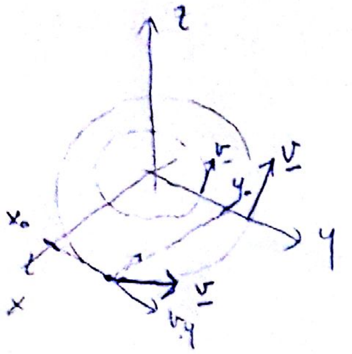
$\partial_1 v_3 - \partial_3 v_1 = 0 \leftarrow$ $\quad$ $\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 = 0 \Leftrightarrow \partial_3 v_2 - \partial_2 v_3 = 0$

$$w_1 = \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \quad | = 0$$
$$w_2 = \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \quad | = 0$$
$$w_3 = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \quad | = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\text{rot}\,\underline{v} = \underline{w}$, ha ez $= \underline{0}$, akkor $\underline{v} = \text{grad}\,\phi$

$\underline{w} = \underline{\nabla} \times \underline{w}$; ahol nabla egy lineáris differenciáloperátor!

Ha a rotáció vektor nem $\underline{0}$, akkor az (a neve is erre utal) adott vektormező „örvényességét" jellemzi!



$$\left.\begin{aligned} v_x(x,y,z) &= -\omega y \\ v_y(x,y,z) &= \omega x \\ v_z(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{w} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} w_x &= \partial_y v_z - \partial_z v_y = 0 \\ w_y &= \partial_z v_x - \partial_x v_z = 0 \\ w_z &= \partial_x v_y - \partial_y v_x = 2\omega \end{aligned} \right.$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

(Általános képlet; térben és síkban is igaz!)

→ Egyenletes szögsebességű forgás!

A **Stokes-tétel** alapján:

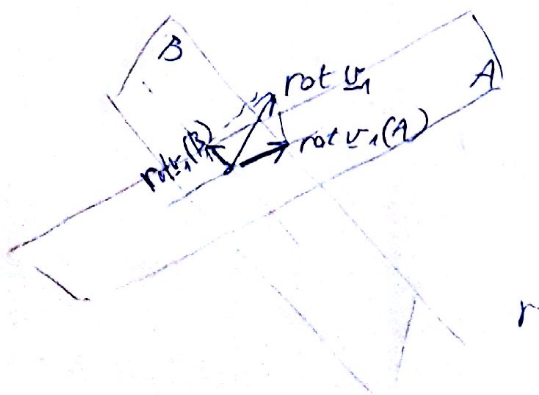
$$\oint_{\sigma = \partial F} \underline{v}\,d\underline{r} = \int_F (\mathrm{rot}\,\underline{v})\,d\underline{F} \Leftrightarrow \oint_\sigma \vec{v}\,d\vec{r} = \int_F \mathrm{rot}\,\vec{v}\,d\vec{F}$$

Azaz a rotáció reprezentációfüggetlen definíciója:

$$\boxed{\lim_{\Delta A \to 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_\sigma \vec{v}\,d\vec{r} = (\mathrm{rot}\,\vec{v})\vec{n}} \quad (\Delta\vec{F} = \vec{n}\,\Delta A)$$

érvényes-e? :)

Adott pontban vetületeit kaphatjuk meg!



Ha ezek a vetületek lineárisan függetlenek és kiadják a térdimenziót, akkor belőlük rekonstruálható $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{v}}$.

(19) Divergencia

Egy vektormező rotációjának eredménye szintén vektor. Ennek a vektornak a diff. operátorral való skalárszorzata értelmezhető.

$$\mathrm{div}\,\underline{v} = \underline{\nabla}\,\underline{v}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} \partial_x v_x \\ \partial_y v_y \\ \partial_z v_z \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$$

Ez akkor $= 0$, ha $\underline{v}$ valamilyen vektormező rotációja!

↲

Biz.: $\mathrm{div}\,\underline{v} \overset{!}{=} 0$

$$v = \mathrm{rot}\,\underline{u}$$

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z \overset{\downarrow}{=} \partial_x(\partial_y u_z - \partial_z u_y) +$$

$$\partial_y(\partial_z u_x - \partial_x u_z) + \partial_z(\partial_x u_y - \partial_y u_x) =$$

$$\boxed{\partial_x \partial_y u_z - \partial_y \partial_x u_z} + \boxed{\partial_y \partial_z u_x - \partial_z \partial_y u_x} +$$

$$\boxed{\partial_z \partial_x u_y - \partial_x \partial_z u_y} = 0$$

A Young-tétel szerint ez igaz!

↲ Q.E.D.

A Gauss-tétel szerint:

$$\oint_{\partial V} \vec{v}(\vec{r})\,d\vec{F} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{v}(\vec{r})\,dV$$

Bázistól függetlenül tehát a divergencia definíciója:

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_F \vec{v}(\vec{r})\,d\vec{F}$$

Magyar neve: FORRÁSSŰRŰSÉG

Persze bármilyen vektormezőnek értelmezhető divergenciája, ami adott helyen nem szinguláris (nem értelmezett).

pl.: értelmetlen

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{\gamma M}{r}$$ fv. rotációjának.

$$F(\underline{r}) = -\gamma \frac{Mm}{r^3}\underline{r}$$ divergenciáját venni

az $r = 0$ helyen, mivel ott $\Phi(\underline{r})$ nincs is értelmezve!!

(30) A gradiens, rotáció, divergencia kiszámítása vektormezők reprezentációja alapján

Ha van egy $\underline{v}(x,y,z) = \underline{v}(\underline{r})$ vektormezőnk, akkor ennek a vektormezőnek a segítségével meg tudjuk határozni, hogy ez lehet-e valaminek a gradiense! Illetve ezután a divergenciáját, rotációját is ki tudjuk számolni!

$\rightarrow$ $\phi(\underline{r})$; ha ennek veszem a gradiensét, $\text{grad}\,\phi(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r})$

$\text{grad}\,\phi(\underline{r}) = \underline{\nabla}\phi(\underline{r}) = \underline{v}(\underline{r})$. Ha ezután ennek veszem a rotációját $\rightarrow$ $\text{rot}(\text{grad}\,\phi(\underline{r})) = \underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\phi(\underline{r}) \equiv 0$, mivel azonos irányú „vektorok".

Indexesen: $\text{rot}(\text{grad}\,\phi(\underline{r}))_k = \varepsilon_{klm}\,\partial_l(\partial_m \phi) =$

$$= \underset{\substack{\circ \\ \text{antiszim.}}}{\varepsilon_{klm}}\ \underset{\substack{\infty \\ \text{szim.}}}{\partial_l \partial_m}\ \phi \equiv 0 \ \triangle!$$

Tehát egy $\underline{v}(\underline{r})$ vektormezőnek, ha a rotációja $= 0$, akkor $\left[\underset{\text{„lehet"}}{\underline{v}(\underline{r})} = \text{grad}\,\phi(\underline{r})\right]$ $\phi(\underline{r})$ skalármező gradiense lehet.

Ha ez teljesül, akkor kezdjük el megkeresni, hogy mi lehet ez a $\phi(\underline{r})$ potenciálfv..

~~(H a Young)~~ IH felhasználjuk azt, hogy $\boxed{v_k = \partial_k \phi}$!

Ezek szerint, ha meg van adva a három vektorkomponens, akkor azok adott index szerint ~~...~~ integráljainak meg kell egyeznie!

$\Rightarrow$ Így kapjuk meg $\phi(\underline{r})$-t!

Ha $\mathrm{rot}\,\underline{v}(\underline{r}) \neq \underline{0}$ akkor gyanakodhatunk arra, hogy $\underline{v}(\underline{r})$ már valaminek a rotációja volt. (Azt már biztos tudjuk, hogy nem lehetett gradiense egy $\phi(\underline{r})$ skalármezőnek!)
Ezt úgy vizsgáljuk, hogy, ha $\mathrm{div}\,\underline{v}(\underline{r}) = 0$, akkor $\underline{v}(\underline{r})$ biztosan rotációja volt valaminek (vagy $= \underline{0}$).

Biz. $\mathrm{div}\,\underline{v} = \partial_k v_k = \partial_1(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2) +$

$$\partial_2(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3) + \partial_3(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) \stackrel{\uparrow}{\equiv} 0$$

Young-tétel miatt!

Pl: ① $v_x = 5x^2 3y 2z^3$
$v_y = 10x^3 2y^2 z$
$v_z = z^3 3y 10x$

$$\mathrm{rot}\,\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z^3 30x - 20x^3 y^2 \\ 90x^2yz^2 - 30z^3y \\ 60x^2yz - 30x^2yz^3 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

$\Rightarrow$ Tehát $\underline{v}(\underline{r}) \neq \mathrm{grad}\,\phi(\underline{r})$!

De még lehet, valaminek a rotációja:

$$\mathrm{div}\,\underline{v} = 60xyz^3 + 40x^3yz + 90xyz^2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Tehát $\underline{v}(\underline{r})$ nem $= \mathrm{rot}\,\underline{w}(\underline{r})$!

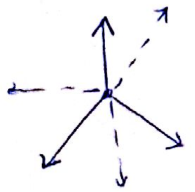
(30) A nabla operátor

$\exists$ egy $\phi(\underline{r})$ skalármezőnk. Eddig, ha ennek vettük a gradiensét, azt a következőképpen értelmeztük:

$$\rightarrow \operatorname{grad}\phi = \partial_k \phi = v_k = (\vec{\nabla}\phi)_k \quad \text{(csak reprezentáció!)}$$

Most azt akarjuk belátni, hogy $\vec{\nabla}\phi$ tényleg vektor.
Ehhez azt kell belátnunk, hogy úgy is transzformálódik, bázistranszformáció esetén, mint egy vektor.

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v} = \sum_k v_k \vec{b}^{(k)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ortonormált} \\ \text{bázisa}}}{=} \sum_k v_k \vec{e}^{(k)}$$



$$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}^{(k)} \sim \vec{v}\,' = \sum_l v'_l \vec{e}^{(l)}$$

$$\hat{A}\vec{v} = \vec{v}\,' \rightarrow \sum_k v_k \hat{A}\vec{e}^{(k)} = \sum_l v'_l \vec{e}^{(l)}$$

$$\boxed{\sum_k v_k \left(\vec{e}^{(l)}\left(\hat{A}\vec{e}^{(k)}\right)\right) = v'_l}$$

$$\sum_k R_{lk} v_k = v'_l$$

$\Rightarrow$ visszafelé elforgatva pedig

$$\sum_m (\widetilde{R_{ml}})\, v'_m = \sum_m R^{-1}_{lm} v'_m = v_l$$

(Tudjuk, hogy $\underline{\underline{R}}$ ortogonális mátrix!)

Tehát: $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$

$$\underline{v} = \underline{\nabla}\phi \qquad \underline{v}' = \underline{\nabla}'\phi'$$

Először be kell látnunk, hogy, hogyan változik ϕ, ha $\underline{r}$-t megváltoztatjuk egy kis $\underline{s}$-val!

$$\phi(\underline{r}+\underline{\delta}) = \phi(\vec r) + \boxed{\vec g(\vec r)}\,\vec\delta$$ (Ez a gradiens „definíciója")

(Reprezentálva adott bázison!

$$\Rightarrow \phi(\underline r+\underline\delta) = \phi(x+\delta_1, y+\delta_2, z+\delta_3) = \phi(x,y,z) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta_2+\frac{\partial\phi}{\partial z}\delta_3$$

$$\phi(x_k+\delta_k) \approx \phi(x_k) + \sum_k \frac{\partial\phi}{\partial x_k}\delta_k + \dots$$

A Taylor-sor további tagjait elhanyagoljuk!

Itt, ha $\phi(x_k+\delta_k)-\phi(x_k)$ és δ_k infinitezimálisan kicsi, akkor:

$$\boxed{d\phi = \sum_k \frac{\partial\phi}{\partial x_k}\, dx_k}$$

Valamint adott reprezentációnál $v_k = \partial_k\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_k}$ $\Leftrightarrow$

$$v_k(\phi(x_k+\delta_k)) - v_k(\phi(x_k)) = \sum_k \frac{\partial v}{\partial \phi_k}\left(\phi(x_k+\delta_k)-\phi(x_k)\right)$$, ha

ϕ változásai igen kicsi, akkor:

$$\boxed{dv_k = \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial\phi_k}\, d\phi}$$

Ezeket egyesítve kapjuk, hogy:

$$\cancel{dv_k = \sum_k \frac{\partial\phi}{\partial x_k}\Big(\sum_l \frac{\partial\phi}{\partial}}$$

!

$$dv_k = \sum_l \frac{\partial v_l}{\partial\phi}\left(\sum_k\frac{\partial\phi}{\partial x_k}dx_k\right) = \boxed{\sum_k\left(\sum_l \frac{\partial v_l}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\right)dx_k}$$

$$\cancel{\Rightarrow dv_k = \sum_k \frac{\partial v}{\partial x_k}dx_k}$$

Most, ha $\phi'(\underline{r}')$ úgy vizsgáljuk, hogy az $\phi'(\underline{r}(\underline{r}'))$

, akkor $v_k' = \sum_l \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x_k'} = \sum_l R_{kl} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} = \sum_l R_{kl} v_l$

$$\uparrow$$

$$R^{-1}_{lk} = R_{kl} \; \triangle!$$

Ezzel beláttuk, hogy $\vec{\nabla}$ tényleg vektort csinál $\phi(\vec{r})$-ből, tehát a gradiens vektor s' úgy is transzformálódik, tehát $\exists \vec{\nabla}$ vektoroperátor!

32) Indexes írásmód

Az indexes írásmód tömörít, meggyorsítja a munkát, legalább olyan hasznos, mint Gauss-eliminációnál a „mátrixos írásmód". Ezáltal áttekinthetőbb lesz a munkánk.

Adott vektorkomponens $^{1)}(\underline{v})_k \to v_k$

I) $(\underline{u}+\underline{v})_k = u_k + v_k$ IV) $(\underline{u}\underline{v})_k = u_k v_k$

III) $(\alpha \underline{v})_k = \alpha v_k$

! Einstein-féle némaindex konvenció

⇒ Ahol adott index kétszer szerepel ott automatikusan összegzünk rá, tehát a $\sum_i$ már elhagyható!

V) $(\underline{u} \times \underline{v})_k = \varepsilon_{klm} u_l v_m$ ⟵ itt is $\sum_l$, $\sum_k$ elhagyható!

VI) $(\underline{\underline{A}}\,\underline{v})_k = A_{kl} v_l$ VII) $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{ml} = A_{mk} B_{kl}$

VIII) $(\underline{a} \circ \underline{b})_{kl} = a_k b_l$

A némaindexkonvenció azért jó, mert ha adott index:

a) 1-szer szerepel, akkor ő megmarad!

b) 2-szer szerepel, akkor összegzünk rá!

c) 2-nél többször adott index ugyanazon tagban NEM (!) szerepelhet!

(Ellenőrzésre jó!)

Az indexes írásmód zárt, mivel számokkal és lineáris ~~ope~~ műveletekkel dolgozunk, ezért a számokra igaz a kommutativitás, és a szorzás disztributív az összeadásra nézve. A lineáris műveletek pedig lineárisak.

IX) $\delta_{kl} v_k = v_l$ X) $A_{kl}\delta_{lk} = A_{kk} = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}}$

XII) $\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mpq} = \delta_{lp}\delta_{kq} - \delta_{lq}\delta_{kp}$ XIII) $\varepsilon_{klm}\delta_{lm} \equiv 0$ ⚠

A XIII) összefüggés nagyon fontos. Ha azon indexekre összegzünk, amelyek az egyik tagban szimmetrikusak, a másikban pedig antiszimmetrikusak, akkor az eredmény azonosan 0!

pl. $(\underline{a}\times\underline{a})_k = \varepsilon_{klm}a_l a_m = -\varepsilon_{kml}a_m a_l \equiv 0$ (!)

Attól függően, hogy adott indexes kifejezésben hány szabad paraméter van tudjuk eldönteni, hogy milyen dologról beszélünk!

$\Rightarrow$ 0 szabad paraméter: skalár

1 szabad paraméter: vektor

2 vagy több szabad paraméter: tenzor

XIV) $[\underline{a}(\underline{b}\times\underline{c})] = a_k\varepsilon_{klm}b_l c_m = \varepsilon_{klm}a_k b_l c_m$ (0 szabad paraméter; tehát ez skalár!)

XV) $(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \underline{a}(\underline{b}\times\underline{c})$

XVI) $(\mathrm{grad}\,\phi)_k = \partial_k\phi$ → definíció szerint azt jelenti, hogy $\frac{\partial\phi}{\partial x_k}$: ϕ skalármező x_k szerinti parciális deriváltja!

A parciális deriválás $\equiv$ a $\vec{\nabla}$ operátor, lineáris! jobbra hat!

XVII) $[\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\phi)]_k = \cancel{\mathrm{grad}}\,[\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\phi)]_k = \partial_k(\partial_k\phi) = \partial_k^2\phi = \Delta\phi$

Laplace operátor!

$$\boxed{\text{XVIII)}\quad \frac{\partial x_l}{\partial x_k} = \partial_k x_l = \delta_{kl}}$$!!

XIX) $(\mathrm{div}\,\underline{v}) = \partial_k v_k$ XX) $\mathrm{rot}\,\underline{v} = \varepsilon_{klm}\partial_l v_m = (\underline{\nabla}\times\underline{v})_k$

antiszim. szimm.

XXI) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi)_k = (\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\phi)_k = \varepsilon_{klm}\partial_l\partial_k\phi \equiv 0$!

(33) Magasabb vektorderiváltak és kapcsolatuk

$\underline{\text{rot}}$: Egy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fv. $\quad \text{rot}\,\underline{v} = \underline{\nabla} \times \underline{v} = \underline{w}$

$\underline{\text{div}}$: Egy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fv. $\quad \text{div}\,\underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$

$\underline{\text{grad}}$: Egy $\underbrace{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \text{ fv.}}$ $\quad \text{grad}\,\phi = \underline{v}$

Most nézük ha az adott hozzárendeléseket nézzük, akkor további műveletek is értelmezhetőek.

① Tudjuk, hogy egy vektormező rotációja $= \underline{0}$ ha az gradiense volt egy $\phi(\underline{r})$ skalármezőnek!

$$\text{rot}\,\underline{v} = \text{rot}(\text{grad}\,\phi) \equiv 0 \qquad \left([\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\phi]_k = \varepsilon_{klm} \partial_l \partial_m \phi \equiv 0 \right)$$

② Tudjuk, hogy ha egy vektormező rotációja volt egy másik vektormezőnek, akkor annak divergenciája 0!

$$\text{div}\,\underline{w} = \text{div}(\text{rot}\,\underline{v}) \equiv 0 \qquad \left(\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \times \underline{v}) = \partial_k \varepsilon_{klm} \partial_l v_m \equiv 0 \right)$$

③ Értelmezhetjük egy gradiens divergenciáját, hiszen ez egy kompatibilis hozzárendelés!!

$$\text{div}(\text{grad}\,\phi) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\phi) = \partial_k \partial_k \phi = \underline{\Delta}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z^2}$$

Ezt $\boxed{\underline{\nabla}\,\underline{\nabla} = \underline{\Delta}}$ Laplace-operátornak nevezzük!

④ $\text{rot}(\text{rot}\,\underline{v}) = \underline{\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v})} = \varepsilon_{klm} \partial_l (\underline{\nabla} \times \underline{v})_m = \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mpq} \partial_l \partial_p v_q$

Eddig oké!

$= (\delta_{kp}\delta_{lq} - \delta_{kq}\delta_{lp})(\partial_l(\partial_p v_q))$

⑤ $\text{grad}(\text{div}\,\underline{v}) = (\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\underline{v}))_k = \partial_k(\partial_l v_l)$ ⚠ $(\neq \Delta = \partial_k \partial_k)$

Most, ha a $\boxed{\text{rot}(\text{rot}\,\underline{v})}$-t továbbvisszük:

④ $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\underline{v}) = \underline{u} \Rightarrow \varepsilon_{klm}\varepsilon_{mpq}\partial_l\partial_p v_q = u_k$

$$(\delta_{kp}\delta_{lq} - \delta_{kq}\delta_{lp})\partial_l\partial_p v_q =$$

$$\delta_{kp}\partial_p\delta_{lq}\partial_l v_q - \partial_p\delta_{kq}v_q\delta_{lp}\partial_l = \underbrace{\partial_k\partial_q v_q}_{(\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\underline{v}))_k} - \underbrace{\partial_p\partial_p v_k}_{(\Delta\underline{v})_k}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\underline{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\underline{v}) - \Delta\underline{v}}$$

Itt értelmeztük a Laplace-operátor hatását vektorra!

$$\boxed{(\Delta\underline{v})_l = \partial_k\partial_k v_l}$$

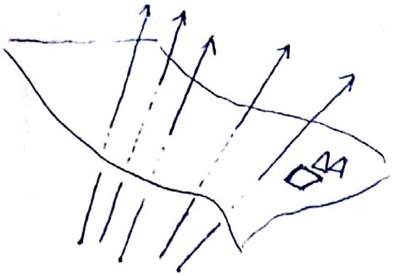
Ez csak akkor igaz, ha Descartes-koordinátarendszerben dolgozunk, de a következő összefüggés segítségével görbe koordinátarendszerben is kiszámítható!

$$\boxed{\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\underline{v}) + \Delta\underline{v} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\underline{v})}$$ ⚠

34. Felületi integrál

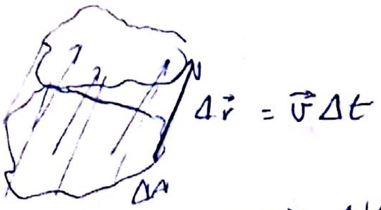
A felület egy alakzat; a felszín ezen alakzat mértékét adja meg!

A felületi integrálhoz szükségünk van egy vektormezőre és egy adott felületre.



A könnyebb magyarázhatóság érdekében legyen ez valamilyen folyadék; a vektormező a folyadék sebességét adja meg adott pontban; a felület pedig tetszőleges. A kérdés az, hogy mennyi víz folyik át adott idő alatt a felületen?

Válasszunk egy kis ΔA darabot. Annyira kicsinyt, hogy ezen belül a vektormező számottevően ne változzon.



Δt idő alatt ennek az „amőboid" alapú hengernek a térfogata folyik át ΔA felületdarabon!

$\rightarrow \Delta V = \Delta A\, \vec{n} \Delta \vec{r}$; ahol $\vec{n}$ a felületre merőleges egységvektor! $\vec{n}\Delta\vec{r}$ így a henger magassága!

- $\vec{n}$: a felületi normális vektor!

$$\Delta V = \Delta A\, \vec{n}\, \Delta \vec{r} \rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = \boxed{\Delta A \vec{n}}\, \vec{v}(\vec{r}) = \Delta \vec{F}\, \vec{v}(\vec{r})$$

$\Rightarrow$ A felület elem vektor

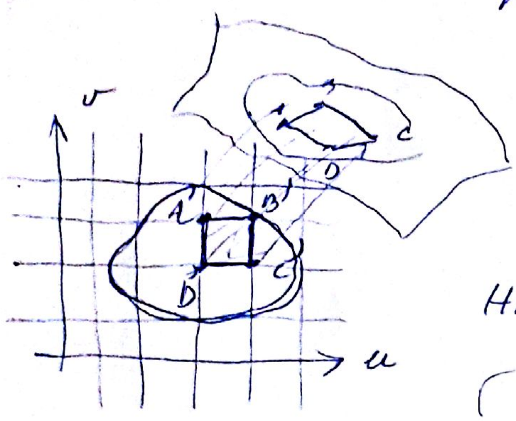
Az időegység alatt átfolyt összes térfogat

$$V_{(1/\Delta t)} = \sum \vec{v}(\vec{r})\Delta \vec{F} = \int \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{F} \quad [\text{FLUXUS}]$$

, ha infinitezimálissá tesszük!

Ennek értékét megfelelő paraméterezéssel tudjuk kiszámítani!

→ A módszer a következő: ∃ egy felületünk és ezt leképezzük egy két dimenziós paramétertérre.

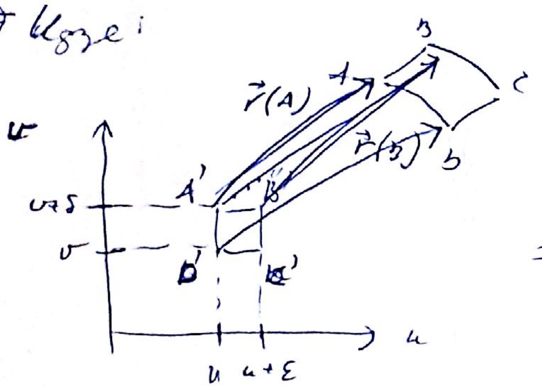


A paraméter teret vízszintes és függőleges egyenesekkel felszeleteljük egybevágó téglalapokra!

Ha elég sűrű a felosztás, akkor ($\vec{AB}=\vec{a}$ és $\vec{AD}=\vec{b}$) ~~akkor~~ egy paralelogramma felületet kapunk a felületen, aminek mértéke:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = T_{ABCD}$$

⇒ Ugyanis:



I) $\vec{r}(B)-\vec{r}(A)=\vec{a}=\vec{r}(u+\varepsilon, v+\delta)-\vec{r}(u, v+\delta)$

II) $\vec{r}(D)-\vec{r}(A)=\vec{b}=\vec{r}(u;v)-\vec{r}(u, v+\delta)$

$$\Rightarrow \vec{a}=\frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u}\Delta u \;;\; \vec{b}=\frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}\Delta v$$

$$\boxed{\vec{b}\times\vec{a}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\Delta u\Delta v=\Delta\vec{F}}$$

Megegyezés szerint $\Delta\vec{F}$ a zárt felületből kifelé mutat, úgy, hogy $\vec{a},\vec{b}$ és $\Delta\vec{F}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkossanak!

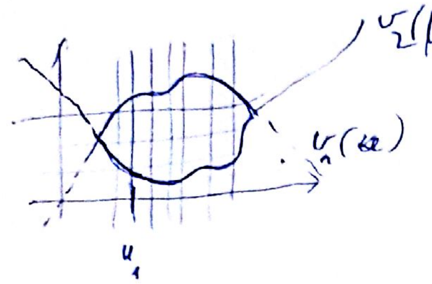
→ Ha infinitezimálisan kicsiny részekre osztjuk:

$$d\vec{F}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,du\,dv$$

$$\left(d\vec{A}=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|du\,dv\right)$$

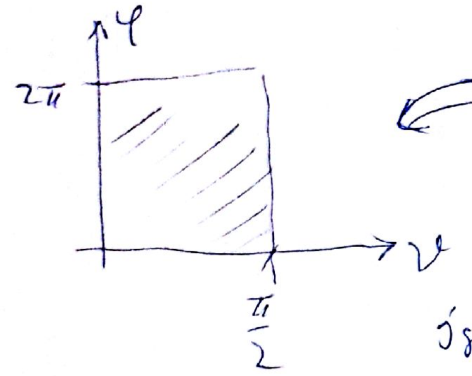
Tehát adott felületnél (például félgömbnél), a paraméterezését kell azt és adott $\underline{v}$ vektormezőt, pedig a paraméterek függvényében megadva kell felírni!

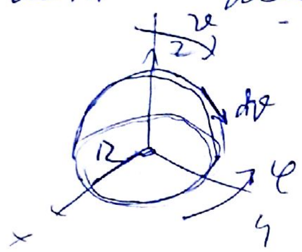
~~Ennek~~ A megfelelő paraméterezés a kulcs, hiszen anélkül határfüggvények mentén kéne integrálni!



$$\Rightarrow \int \int_{v_1(u_1)}^{v_2(u_1)} f(u_1,v)\, dv\, du = \int F(u)\, du$$

Ezért paraméterezzük úgy, hogy a leképezési téglalap alakú legyen, legyen így a határok mentén az integrálás egyszerű!





$$\underline{r}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vartheta \in \left[0; \tfrac{\pi}{2}\right]; \ \varphi \in [0; 2\pi[$$

Így az egész felszínt leképezhetjük ϑ és φ paraméterekkel!

$$\Rightarrow d\underline{F} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial\varphi}\, d\vartheta\, d\varphi = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\vartheta\, d\varphi$$

$$d\underline{F} = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta\, d\varphi = \boxed{R^{\cancel{2}} \sin\vartheta\ \underline{r}(\vartheta,\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi}$$

Tetszőleges $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező, ha választunk: $\underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\underline{v}(\underline{r}(\vartheta,\varphi)) = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} = \underline{r}(\vartheta,\varphi)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \underline{r}(\vartheta,\varphi)\,\underline{r}(\vartheta,\varphi)\, R\sin\vartheta = \iint R^3 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

Az általános recept a következő:

0) Hány paraméteres?

(felület-2 ; görbe -1 ; térfogat -3)

1) Koordinátarendszer megválasztása

2) Paraméterezés!

3) Határok meghatározása

4) Szimbólumok feloldása

pl.: $d\underline{\vec{F}} = \dfrac{\partial \underline{\vec{r}}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \underline{\vec{r}}}{\partial v}\, du\, dv$ stb.

5) Deriválás! (Mechanikus művelet!)

6) Vektorműveletek elvégzése.

(skaláris; vektoriális szorzás)

7) Behelyettesítés az integrálképletbe!

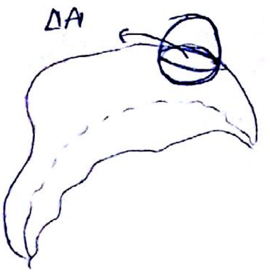
8) Újabb vektorműveletek az integrálon belül!

9) TARTOMÁNYINTEGRÁL KISZÁMÍTÁSA!

Ily.

35 Felületek felszíne, testek térfogata

A görbe felületek dimenzióját úgy értjük, hogy kölcsönösen egyértelmű leképezésbe hozhatóak egy lineáris térrel. Ez a leképezés nem folytonos! (Térképen szakadás Japán és Amerika között!)



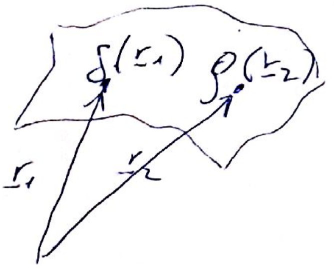
Egy görbe felületből kiharapunk egy kis darabot úgy, hogy egy apró gömbbel elmetszük azt. Ha ez a gömb elég kicsiny, akkor a metszet közelíthető síkidomokkal!

Ha ezen kis síkidomok területösszege véges, akkor ezek összegének határértéke adja a felület mértékét, a felszínt!

$$\sum \Delta A \Rightarrow \int dA$$

pl.: kíváncsiak vagyunk egy felület tömegére

→ Aladdin-szőnyege :)



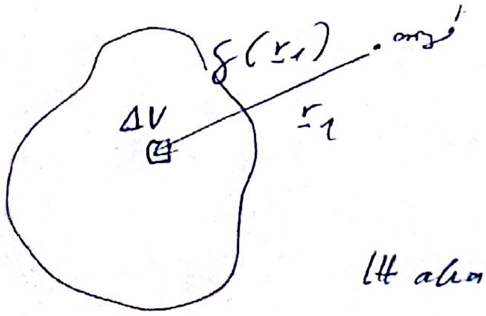
$\rho(\vec{r})$ sűrűség fv.

$\Rightarrow \Delta m = \rho(\vec{r})\Delta A$ tömegdarab egy felületdarabon

$$M = \sum \rho(\vec{r})\Delta A = \int \rho(\vec{r})\Delta A$$

(Ilyen típusú integrált vonal mentén is lehet értelmezni!)

A felszíni integrál általánosítása 3D-ben a térfogati integrál.



pl.: Változó sűrűségű test.

$\rho(\underline{r}_1)$

$$\rightarrow M = \int dV \rho(\underline{r})$$

Itt akármilyen térfogat megfelelő, hiszen az nem lehet görbült! (MÉG!)

Felszín kiszámításánál is a paraméterezés a cél. A felületet leképezzük a paraméter térre úgy, hogy téglalap legyen a képe, vagy olyan alakzatra, hogy annak mentén könnyű legyen elvégezni az integrálást!

$$d\underline{F} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\, du\, dv$$ – Ez a felület elem vektor.

Ennek abszolútértéke adja meg a kis ΔA felületelemet.

$$\boxed{dA = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| du\, dv}$$

$$\int \phi(\underline{r})\, dA = I$$: Adott skalárfv. integrálunk így! (sűrűség, töltés)

Gömbre: $dA = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, R^2 \sin\vartheta = \int_0^{\pi} d\vartheta\, 2\pi R^2 \sin\vartheta = \boxed{4R^2\pi}$$

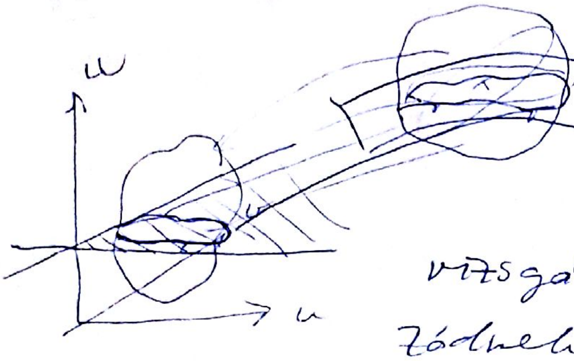
~~Forgásszimmetrikus testek~~ Tengely körül elforgatott testek felszínének meghatározására felhasználhatjuk Guldin-I tételét is:

S_k – A kerület súlypontja

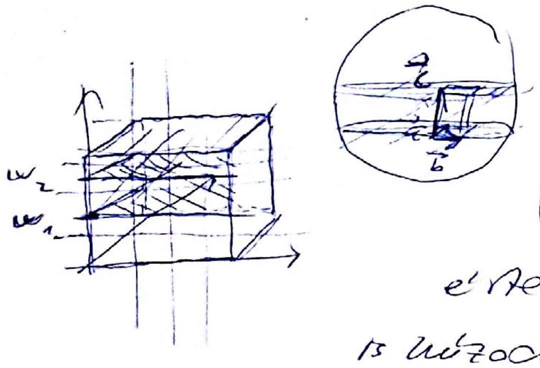
$A = K 2\pi a$ (ha teljesen körbeforgatjuk!)

A térfogati integrál kiszámításához nem feltétlenül lenne szükség paraméterezésre. Azonban az megkönnyíti a számolást; hiszen leegyszerűsíti az integrálhatárokat! Ezért itt is paraméterezünk.

Itt is megpróbálom úgy a paraméterezni az alakzatot, hogy a kép egy téglatest, vagy valamilyen hasonlóan egyszerű objektum legyen!



Itt is a paraméterteret lapokon fel! $\boxed{w = áll.}$ értékek mellett, az adott u, v síkokat vizsgálom, hogy azok, hogyan képződnek le!



Azt már tudjuk, hogy síkban $|\vec{a}\times\vec{b}|$ lesz a kis dA felületünk értéke. Itt két w_2, w_1 állandó sík között is különbözik egy $\vec{c}$ vektor!

Tehát egy ilyen kis ΔV térfogatelem mértéke (értéke?) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ vegyesszorzatával egyezik meg!

$$\underline{a} = \frac{\partial r}{\partial u}\Delta u \; ; \quad \underline{b} = \frac{\partial r}{\partial v}\Delta v \qquad \underline{c} = \frac{\partial r}{\partial w}\Delta w$$

$$\Rightarrow dV = \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}; \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}; \frac{\partial \underline{r}}{\partial w}\right)}\, dw\, du\, dv$$

Ezt nevezzük Jacobi-determinánsnak!

Így már gömb térfogata könnyedén kiszámítható.

$$\underline{r}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} \rightarrow$$

Annyi a különbség, hogy itt már R, ϑ és φ is változik!

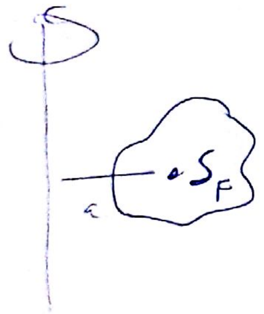
$$J = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \vartheta}; \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi}; \frac{\partial \underline{r}}{\partial r}\right) = r^2\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow dV = r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

A felületi integrál segít abban, hogy gravitációs térben pontosan meg tudjuk határozni egy test adott pontjaira ható erőket!

A térfogati integrál segítségével különböző testek térfogatát és tehetetlenségi nyomatékát is ki tudjuk számítani!

Meg kell említeni még Guldin-II. tételét:



S_F - A felület súlypontja!

$$V = T_{alap} 2\pi a$$

(36) Integrálok definíciója és kiszámítása, paraméterezés

dim = 1 — a) skalármérték ds

|

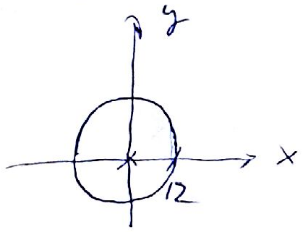
b) vektor $d\vec{r}$

a) (1) $\int ds \to$ ívhossz

$$\int ds = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_k |\Delta \vec{r}_k| \to \sum_k \lim_{\Delta t \to 0} |\dot{\underline{r}}_k(t)\, \Delta t| = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)|\, dt$$

$$s = \int ds = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)|\, dt$$ $\to$ t itt jelölhet akármilyen paramétert, nem muszáj, hogy idő legyen!

pl:



$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \underline{r}(\varphi) = R\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$s = \int ds = \int_0^{2\pi} d\varphi\, |\dot{\underline{r}}(\varphi)| = \int_0^{2\pi} d\varphi \left| R\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{R\,2\pi}}$$

(2) $\int \rho(\vec{r})\, ds = m/Q$ ← változó töltés/tömeg-sűrűségű fonálra

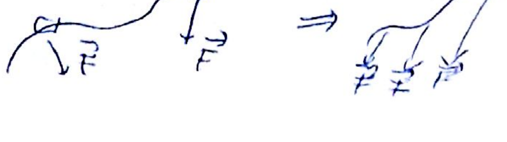
$\Updownarrow$

(3) $\int \phi(\vec{r})\, ds$ is értelmezhető. Adott ív mentén az összpotenciál.

Hasonló $\rho(\vec{r})$-hez!

(4) $\int \vec{v}(\vec{r})\, ds$ Adott ív (fonál) mentén ható eredő vektormező

(Eredő erő



1) ① $\int d\vec{r} = \Delta\vec{r}$: megadja az elmozdulásvektort!

② $\int \varrho(\vec{r})\,d\vec{r}$; Valami olyasmi lehet, hogy változó sűrűségű anyagban vett elmozdulásvektor.

(~ Meg lehet vele határozni, hogy melyik a legkényelmesebb út. ?)

③ $\int \phi(\vec{r})\,d\vec{r}$: A potenciál térben való elmozdulás mellékesen összpotenciálváltozással jár.

→ vektor eredmény (!) ?

④ $\int \vec{v}(\vec{r})\,d\vec{r}$: Az erőtér munkája adott elmozdulásra.

→ VONALMENTI INTEGRÁL

⑤ $\int \vec{v}(\vec{r})\times d\vec{r}$ (???) ⑥ $\int \vec{v}(\vec{r})\circ d\vec{r}$ (????)

dim = 2 → a) dA (felszínelem)

b) $d\vec{F}$ (felületelem vektor)

a) ① $\int dA$: A felület mértéke a felszín!

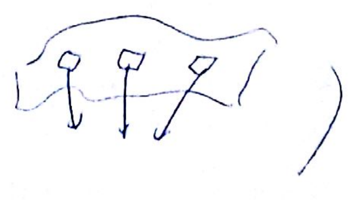
② $\int \varrho(\vec{r})\,dA$: Változó tömeg/töltés/... eloszlású anyag össztömege/töltése/...

⇕

③ $\int \phi(\vec{r})\,dA$ Adott ~~felületen~~ felszínen az összpotenciál.

④ $\int \vec{v}(\vec{r})\,dA$ Adott felszínen ható eredő vektor. mező!

(Eredő erő Aladdin szőnyegére



)

8) $d\vec{F}$ felületelem vektor

① $\int d\vec{F}$ $\int \rho(\vec{r})\, d\vec{F}$ $\int \phi(\vec{r})\, d\vec{F}$

② $\int \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{F}$ (felületi integrál; fluxus!)

③ $\int \vec{v}(\vec{r}) \times d\vec{F}$ (???) $\int \vec{v}(\vec{r}) \circ d\vec{F}$ (???)

$\boxed{\dim = 3}$

① $\int dV$ → Térfogati integrál, megadja egy test össztérfogatát!

② $\int \rho(\vec{r})\, dV$ → Változó sűrűségű test tömege!

③ $\int \phi(\vec{r})\, dV$ → Adott térfogaton „tárolt" potenciál.

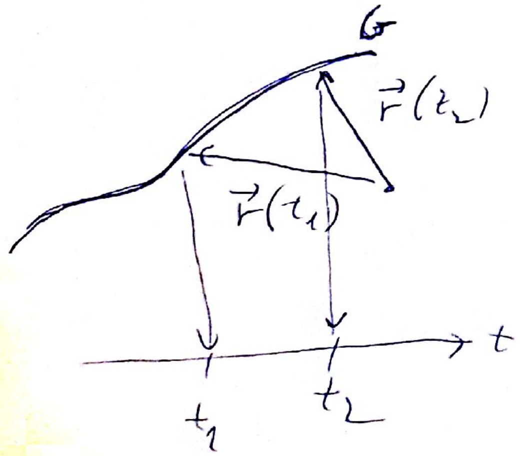
④ $\int \vec{v}(\vec{r})\, dV$ → Adott térfogatra ható eredő vektormező értéke!

(Felhőre ható gravitáció:

)

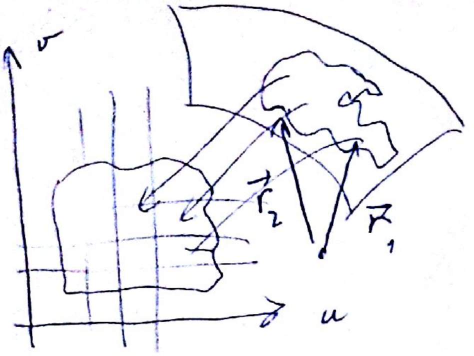
Paraméterezés:

→ görbe: 1D-ós térre képződik le, azaz 1 paraméterrel megadható!

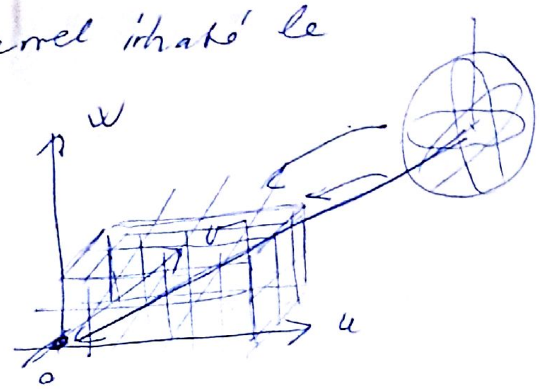


Térképező fv.-nek nevezzük azt, ami leképezi a paramétertérre az adott objektumot.

→ Felület: 2D-ós lineáris térre képződik le; két paraméterrel írható le.



→ Test: 3D-ós térre képződik le, 3 paraméterrel írható le



Választunk a 3D-ós térben bázist!

(1) $\vec r(p) \to \underline{r}(p) = \begin{pmatrix} x(p) \\ y(p) \\ z(p) \end{pmatrix}$

↗ paraméter!

(2) $\vec r(u,v) \to \underline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$

(1)
$$\lim_{\Delta p \to 0} \frac{\underline{r}(p+\Delta p) - \underline{r}(p)}{\Delta p} = \dot{\underline{r}}(p) \Rightarrow \Delta \underline{r} \approx \dot{\underline{r}}(p)\Delta p$$
$$d\underline{r} \approx \dot{\underline{r}}(p)\, dp$$

$$\Rightarrow \int \vec v(\vec r)\, d\vec r = \int \vec v(\vec r(p))\, \dot{\vec r}(p)\, dp = \int F(p)\, dp$$

(2) Ugyanígy eljuthatunk arra, hogy 2D-ban:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{r}(u+\varepsilon, v) - \underline{r}(u,v)}{\varepsilon} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \Rightarrow \underline{a} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} du$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\underline{r}(u,v+\delta) - \underline{r}(u,v)}{\delta} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \delta} \Rightarrow \underline{b} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} dv$$

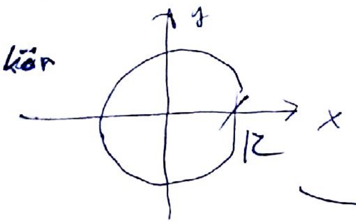
$\Rightarrow d\vec{F} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\, du\, dv$; és $dA = \left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| du\, dv$

(3) $\vec{r}(u,v,w) \to \underline{r}(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$

$$dV = \underbrace{\left(\frac{\partial r}{\partial u} ; \frac{\partial r}{\partial v} ; \frac{\partial r}{\partial w} \right)}_{\text{Jacobi-determináns!}} du\, dv\, dw$$

Standard paraméterezések

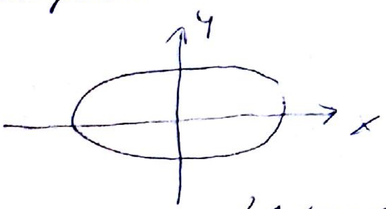
a) kör



$x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$ $\Big\}$ $\underline{r}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$

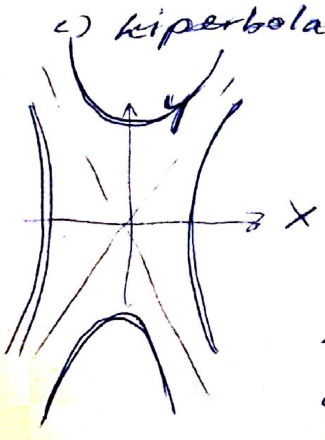
b) ellipszis



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0; 2\pi[$

(A kör affin képe)

c) hiperbola



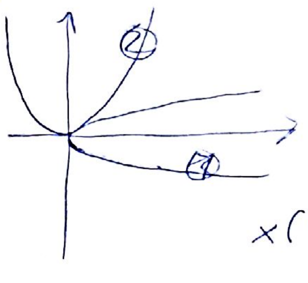
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$t \in]-\infty; \infty[$

$x(t) = \pm a\,\mathrm{ch}(t)$

$y(t) = \pm b\,\mathrm{sh}(t)$

d) parabola



① $y^2 = 2px$

② $x^2 = 2py$

$x(y) = \frac{y}{\sqrt{2p}}$

$y(y) = y$

$z(y) = 0$

e) forgási ellipszoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ & t-vel. $t \in (0;1]$

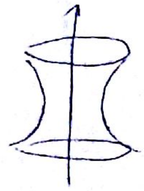
$x(\vartheta, \varphi) = a\cos\vartheta\cos\varphi$

$y(\vartheta; \varphi) = a\cos\vartheta\sin\varphi$ $\rightarrow$ Nem forgási ellipszoidnál a, b, c

$z(\vartheta; \varphi) = c\sin\vartheta$

Ha venni akarjuk a -V- térfogatát akkor $r(\vartheta, \varphi)$ ...-tal*

f) hiperboloid



$x = a \operatorname{ch}\alpha \cos\varphi$ $\quad \alpha \in [\gamma; \beta]$

$y = b \operatorname{ch}\alpha \sin\varphi$ $\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$

$z = c \operatorname{sh}\alpha$

g) kétköpenyű hiperboloid $\quad \left(\frac{z}{c}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

$x = \pm a \operatorname{sh}\beta \cos\varphi$

$y = \pm b \operatorname{sh}\beta \sin\varphi$ $\quad \beta \in [0; \varepsilon[$

$z = \pm c \operatorname{ch}\beta$

h) ~~hip~~ paraboloid

$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow$ $\quad x = a \cdot s \cos\varphi$

$y = bs \sin\varphi$

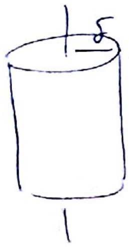
$z = s^2$

i) nyereg $\quad z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $\quad x = as \operatorname{ch}\varphi$

$y = bs \operatorname{sh}\varphi$

$z = s^2$

j) henger

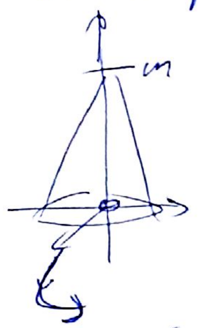


$x = \delta \cos\varphi$

$y = \delta \sin\varphi$

$z = z$

k) kúp:



$x = r \sin\alpha \cos\varphi$

$y = r \sin\alpha \sin\varphi$

$z = r \cos\alpha$

vagy

$x = (m - z) \operatorname{tg}\alpha \cos\varphi$

$y = (m - z) \operatorname{tg}\alpha \sin\varphi$

$z = z$

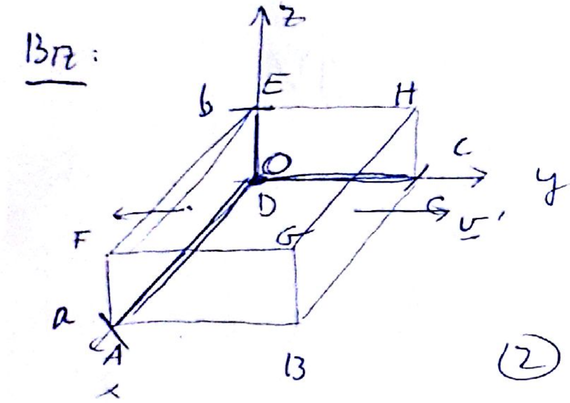
(37) Gauss-tétel

$$\oint \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F} = \int_V \mathrm{div}\, \underline{v}\, dV$$

$F = \partial V$

(zárt felület, ami egy térfogatot határol)

Biz:



$d\underline{F} = \underline{n}\, dA$

(1) $\int\limits_{ADEF} \underline{v}_1 d\underline{F} \approx \underline{v}\, \underline{n}\, \Delta A = \underline{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ab$

(2) $\int\limits_{BGHC} \underline{v}_1' d\underline{F} \approx \underline{v}' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ab$

$\underline{v}(x,y,z)$; míg $\underline{v}'(x, y+c, z) \approx \underline{v}(x,y,z) + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} c$

így (2) $\int\limits_{BGHC} \underline{v}' d\underline{F} = \left[\underline{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} c \right] ab$

$$\Rightarrow \boxed{\int\limits_{ADEF} + \int\limits_{BGHC} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial y} abc}$$

(3) $\int\limits_{ABCD} \underline{v}_z d\underline{F} \approx \underline{v}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ac$ (4) $\int\limits_{FGHE} \underline{v}_z' d\underline{F} \approx \left[\underline{v}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} b \right] ac$

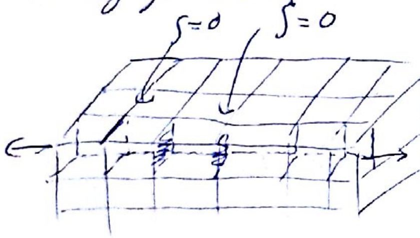
$$\boxed{\int\limits_{ABCD} + \int\limits_{FGHE} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial z} abc}$$

(5) $\int\limits_{EHCD} \underline{v}\, d\underline{F} \approx \underline{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} bc$ (6) $\int\limits_{ABGF} \underline{v}' d\underline{F} \approx \left[\underline{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial x} a \right] bc$

$$\boxed{\int_{EHCD} + \int_{ABGF} = \frac{\partial v}{\partial x} abc}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \underline{v}\, d\underline{F} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) abc = (\mathrm{div}\, \underline{v})\, \underbrace{abc}_{\Delta V}$$

Ezt most beláttuk egy igen kicsi méretű téglatestre. Mert ha ebből sokat teszünk egymás mellé, akkor az érintkező oldalakon lévő felületi integrálok kiejtik egymást!



$$\Rightarrow \oint \underline{v}\, d\underline{F} = \sum \mathrm{div}\, \underline{v}\, \Delta V = \int \mathrm{div}\, \underline{v}\, dV$$

Ha elegendően kicsi!

Előfordulhat, hogy a Gauss-tétel nem igaz, ha a térfogati integrál nincs értelmezve.

(div $\underline{v}$ miatt!)

pl.: Ha egy $\underline{v}$ vektormező divergenciája 0, akkor az azt jelenti, hogy az a vektormező forrásmentes!

Elektromágnesességben:

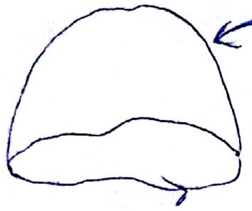
(ahol nincsenek töltések) $\oint \underline{E}\, d\underline{F} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\, \underline{E} = 0$! A mágneses és elektromos mező is forrásmentes!

$\oint \underline{B}\, d\underline{F} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\, \underline{B} = 0$! (a végtelenbe mennek, vagy záródnak!)

↳ Ahol töltések vannak, ott

$$\boxed{\oint \underline{E}\, d\underline{F} = Q = \int \rho(\underline{r})\, dV} \Rightarrow \boxed{\underbrace{\rho(\underline{r})}_{\text{töltéssűrűség}} = \overbrace{\mathrm{div}\, \underline{E}}^{\text{elektromos vektormező divergenciája}}}$$

38 A Stokes-tétel



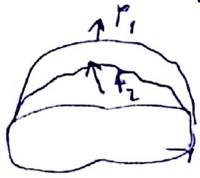
$$\boxed{\oint_{G=\partial F} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_F (\text{rot}\,\underline{v})\,d\underline{F}}$$

(A görbe a felület határa.)

(Nyitott felület!)

Az irányított görbe alapján jobbkéz-szabállyal állapítom meg, hogy merre mutasson a felületelem vektor!

→ Mindegy, hogy milyen felületet húzok rá, hiszen:



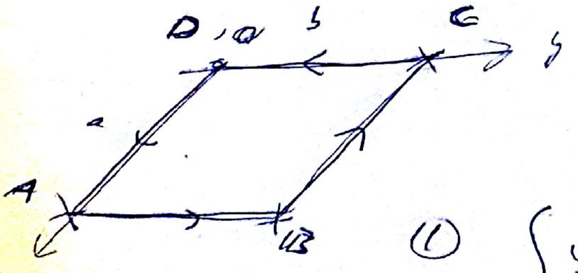
$$\oint_{G=\partial F_1} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_{F_1} (\text{rot}\,\underline{v})\,d\underline{F}_1 = -\int_{F_1'} (\text{rot}\,\underline{v})\,d\underline{F}_1'$$

$$\|$$

$$\oint_{G=\partial F_2} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_{F_2} (\text{rot}\,\underline{v})\,d\underline{F}_2$$

$$0 = \int_{F_2} (\text{rot}\,\underline{v})\,d\underline{F}_2 + \int_{F_1} \text{rot}\,\underline{v}\,d\underline{F}_1' = \int (\text{rot}\,\underline{v})\,d\underline{F} \overset{\text{Gauss-tétel miatt}}{=} \int dV\,\underbrace{\text{div}(\text{rot}\,\underline{v})}_{\equiv 0\,!}$$

Most vegyünk egy kicsiny tetszőleges síklapot (téglalap-alakút).



$$\int_{\square} \underline{v}\,d\underline{r} = ?$$

(1) $$\int_{DA} \underline{v}\,d\underline{r} \approx v_x(x,y,z)\,a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = v_x a$$

(2) $$\int_{BC} \underline{v}'\,d\underline{r} \approx \underline{v}(x,y+b,z)\,a\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

② $\int_{BC} \underline{v}\,d\underline{r} \approx -v_x a - \frac{\partial v_x}{\partial y} ab \quad \Rightarrow ① + ② \Rightarrow -\frac{\partial v_x}{\partial y} ab$

③ $\int_{BA} \underline{v}\,d\underline{r} \approx v_y(x,y,z)\, b \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = v_y(x,y,z)\,b + \frac{\partial v_y}{\partial x} ab$

$$\int_{DC} \underline{v}\,d\underline{r} \approx -v_y(x,y,z)\, b$$

$$\int_{DC} + \int_{BA} = \frac{\partial v_y}{\partial x} ab$$

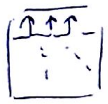
$$\Rightarrow \oint_{\square} \underline{v}\,d\underline{r} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) ab = (\mathrm{rot}\,\underline{v})_z\, dA$$

$$(\mathrm{rot}\,\underline{v})_z = (\mathrm{rot}\,\underline{v}) \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\underline{n}}$$

$$\rightarrow \oint_{\square} \underline{v}\,d\underline{r} = (\mathrm{rot}\,\underline{v})\,\underline{n}\,dA = \mathrm{rot}\,\underline{v}\,d\underline{F}$$

Ha sok ilyen kis téglalapot teszünk egymás mellé, akkor

$\int = 0$ $\Rightarrow \oint \underline{v}\,d\underline{r} = \sum \mathrm{rot}\,\underline{v}\,d\underline{F} = \int \mathrm{rot}\,\underline{v}\,d\underline{F}$

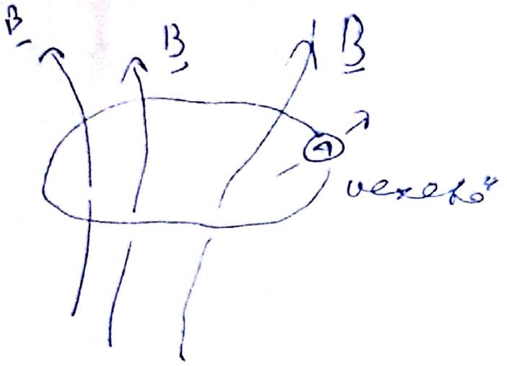


Ha nem síkgörbéről van szó, akkor csak a koordináta-rendszert forgatom el, a felosztást pedig olyan kicsire veszem, hogy téglalappal közelíteni lehessen.

⇒ A Stokes-tétel sem igaz, ha szingularitáson megy át a görbe, mivel abban a pontban (rot $\underline{v}$) értelmetlen!

(!)

Az elektromágnességtanban is használjuk:



$$\frac{d}{dt}\int \underline{B}\, d\underline{f} \sim I$$

∂F (zárt)

Ha a drótot elvesszük akkor is van áram a mágneses mező megváltozásának hatására!

$$\frac{d}{dt}\int \underline{B}\, d\underline{f} = -c\oint \underline{E}\, d\underline{r} \leftarrow \text{körfeszültség (1)}$$

$$= -c\int (\mathrm{rot}\,\underline{E})\, d\underline{f} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\underline{E}}$$

A III. Maxwell-egyenlet.